



**You have downloaded a document from  
RE-BUS  
repository of the University of Silesia in Katowice**

**Title:** Leptonowa macierz mieszania - aspekty symetrii i analiza numeryczna

**Author:** Bartosz Dziewit

**Citation style:** Dziewit Bartosz. (2014). Leptonowa macierz mieszania - aspekty symetrii i analiza numeryczna. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

© Korzystanie z tego materiału jest możliwe zgodnie z właściwymi przepisami o dozwolonym użytku lub o innych wyjątkach przewidzianych w przepisach prawa, a korzystanie w szerszym zakresie wymaga uzyskania zgody uprawnionego.



UNIwersYTET ŚLĄSKI  
W KATOWICACH



Biblioteka  
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki  
i Szkolnictwa Wyższego

Uniwersytet Śląski w Katowicach  
Wydział Matematyki Fizyki i Chemii  
Instytut Fizyki

Rozprawa doktorska

**Leptonowa macierz mieszania - aspekty  
symetrii i analiza numeryczna**

Bartosz Dziewit

Promotor

Prof. dr hab. Marek Zrałek

9 maja 2014

Cześć pracy wykonana jest w ramach projektu badawczego o numerze:  
UMO-2013/09B/ST2/03382

*Dziękuję prof. dr hab. Markowi Zrałkowi, pod kierunkiem którego powstała ta rozprawa, za cierpliwość, życzliwość i wiarę w moją osobę, obejmującą nie tylko sprawy naukowe. Za wiele lat współpracy i opieki. Przede wszystkim jednak za profesjonalizm i stale płynącą dla mnie naukę z relacji uczeń - Mistrz.*

*Wszystkim pracownikom Zakładu Teorii Pola i Cząstek Elementarnych których pomoc i wkład w rozwój mojej osoby, tu również nie tylko na polu zawodowym - cenię. Prof. dr hab. Karolowi Kołodziejowi, prof. dr hab. Henrykowi Czyżowi, prof. dr hab. Januszowi Gluzie, dr hab. Jackowi Sysce.*

*Pracownikom Zakładu Astrofizyki i Kosmologii: prof. dr hab. Janowi Stądkowskiemu, prof. dr hab. Markowi Biesiadzie, prof. dr hab. Ilonie Bednarek. Pracownikom Zakładu Fizyki Ciała stałego: prof. dr hab. Elżbiecie Zipper, prof. dr hab. Jurkowi Dajce, prof. dr hab. Maciejowi Maśce, prof. dr hab. Marcinowi Mierzejewskiemu, prof. dr hab. Markowi Szopie, prof. dr hab. Władysławowi Borgielowi.*

*Przyjaciółom bez których zaangażowania nie byłoby możliwe ukończenie tej pracy: Jerzemu Królowi i Sebastianowi Zajęcowi.*

*Aleksandrze Piórkowskiej, Ani Szczypińskiej, Ani Gorczyca-Goraj, Monice Pienskoś, Agacie Bielas, Szymonowi Szczypińskiemu, Marcinowi Kurpasowi, Łukaszowi Machurze, Krzysztofowi Bielasowi, Irkowi Pakule, Adamowi Staroniowi, Tomkowi Jelińskiemu, Krzysztofowi Kajdzie, Mariuszowi Lisowskiemu.*

*Dziękuję bliskim z rodziny a szczególnie rodzicom za trud wychowania.*

*Dianie Domańskiej, której dedykuję rozprawę, a której serce było jej motorem napędowym.*

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>4</b>
2.1	Masa neutrin w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach . . . . .	4
2.2	Oscylacje neutrin i macierz mieszania leptonów . . . . .	7
2.3	Doświadczalne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin . . . . .	14
2.4	Analityczne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin . . . . .	17
2.5	Wzorce symetrii macierzy mieszania . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Symetrie abelowe macierzy masowej leptonów z teksturami zerowymi</b>	<b>22</b>
3.1	Przykład realizacji symetrii abelowej dla tekstury z dwoma zerami . . . . .	23
3.2	Tekstury zerowe dla neutrin majorany w przypadku zachowanej symetrii CP . . . . .	26
3.2.1	Opis algorytmu weryfikacji tekstur zerowych . . . . .	26
3.2.2	Krótki przegląd wyników opartych na starych, mniej precyzyjnych danych doświadczalnych . . . . .	31
3.2.3	Analiza obecnych danych doświadczalnych . . . . .	37
3.3	Fenomenologiczna rekonstrukcja macierzy masowej leptonów w funkcji masy najbliższego neutrina . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Nieabelowe dyskretne grupy symetrii macierzy masowej leptonów</b>	<b>54</b>
4.1	Symetrie nieabelowe w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach . . . . .	54
4.2	Związek między wyborem bazy dla leptonów naładowanych a symetrią rodzinną . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>65</b>
	<b>Dodatek A Podstawowe definicje</b>	<b>67</b>
	<b>Dodatek B Diagonalizacja macierzy</b>	<b>69</b>
	<b>Dodatek C Podstawienia</b>	<b>70</b>
	<b>Literatura</b>	<b>71</b>
	<b>Spis rysunków</b>	<b>81</b>
	<b>Spis tabel</b>	<b>81</b>

# 1 Wstęp

W Modelu Standardowym (MS) cząstek elementarnych rozróżnia się trzy rodziny fermionów. W każdej z tych rodzin mamy dwa rodzaje kwarków z wartością ładunku elektrycznego  $Q = 2/3$  i  $Q = -1/3$  oraz dwa rodzaje leptonów, z ładunkiem  $Q = -1$  oraz  $Q = 0$ . Prawie wszystkie własności kwantowe podobnych cząstek w rodzinach są identyczne. Masy natomiast różnią się diametralnie. Przedstawione są one w poniższej tabeli.

Rodzina	1-sza	2-ga	3-cia
Kwarki	<b>u</b> (2.3)	<b>c</b> (1275)	<b>t</b> (173940)
	<b>d</b> (4.8)	<b>s</b> (95)	<b>b</b> (4180)
Leptony	<b>e</b> (0.511)	<b><math>\mu</math></b> (105.7)	<b><math>\tau</math></b> (1776.8)
	<b><math>\nu_e</math></b> ( $\sim 10^{-6}$ )	<b><math>\nu_\mu</math></b> ( $\sim 10^{-6}$ )	<b><math>\nu_\tau</math></b> ( $\sim 10^{-6}$ )

Tabela 1: *Trzy rodziny fermionów Modelu Standardowego, wraz z odpowiadającymi im masami (w MeV). Dla neutrin znane są tylko górne ograniczenia wartości mas.*

Model Standardowy oddziaływań fundamentalnych jest, przy obecnie osiągalnych energiach, bardzo dobrze pracującą teorią. Powszechnie uważa się jednak, że jest to teoria efektywna, która przy większych energiach będzie wymagać modyfikacji. Nawet przy swojej dużej zgodności z eksperymentem także i obecnie MS nie satysfakcjonuje. Zgadza się z eksperymentem, ale kosztem doboru wielu (ponad 20) parametrów. Część tych wyznaczanych z doświadczenia parametrów to: masy, kąty mieszania i fazy łamania symetrii CP kwarków i leptonów (6 mas kwarków, 6 mas leptonów oraz odpowiednio 4 - dla neutrin Diraca lub 6 - dla neutrin Majorany, parametrów macierzy mieszania). Znany jest mechanizm, dzięki któremu w MS, cząstki początkowo bezmasowe po spontanicznym złamaniu symetrii nabywają masę. Mechanizm ten, zwany mechanizmem Higgsa, polega na oddziaływaniu cząstek z tak zwanym polem Higgsa, które przenika całą przestrzeń. Jest już prawie pewne, że cząstka Higgsa została odkryta w LHC, choć końcowe potwierdzenie nastąpi po dalszym zbadaniu kanałów rozpadu obserwowanego rezonansu. Pomimo znajomości mechanizmu nabywania masy przez cząstki elementarne nie można twierdzić, że w ogólności problem masy fermionów został rozwiązany. Nie znamy bowiem siły oddziaływania każdej cząstki z polem Higgsa, co oznacza,

iż nie znamy stałych Yukawy występujących w potencjale Yukawy i nie potrafimy obliczyć numerycznych wartości mas z pierwszych zasad. Dodatkowo nie wiemy dlaczego istnieją trzy rodziny kwarków i leptonów oraz czy są to wszystkie rodziny. Dlaczego masy wszystkich naładowanych fermionów mają strukturę hierarchiczną, z masami dolnych kwarków tego samego rzędu co odpowiadające im masy naładowanych leptonów? W chwili obecnej nie potrafimy określić wartości mas neutrin ale wiemy, że ich wartości są rzędu  $10^{-6}$  MeV, co rodzi naturalne pytanie dlaczego są one tak małe w porównaniu z innymi cząstkami.

Można rozważać modele zakładające, że zarówno w sektorze leptonowym jak i kwarkowym istnieją fundamentalne symetrie wiążące między sobą fermiony różnych generacji dające relacje pomiędzy masami oraz elementami macierzy mieszania w ramach rodziny. Istnienie takich symetrii redukowałoby ilość swobodnych parametrów MS oraz mogłoby pomóc w odpowiedzi na wymienione wyżej pytania i wskazać jaka teoria uogólni Model Standardowy. W fizyce cząstek elementarnych powiązanie symetrią mas i elementów macierzy mieszania dla kwarków i leptonów ma wielkie znaczenie dla dalszych badań. Być może przyczyni się to do pełnego rozwikłania natury masy składników materii, które z pewnością wymaga wyjścia poza MS. Wykazanie, że istnieje pewna symetria może pomóc w poszukiwaniu uogólnień MS, bowiem wydaje się, że przyszła teoria powinna taką symetrię posiadać. Z drugiej strony, niemożliwość znalezienia takiej symetrii może wskazywać na inne pochodzenie masy cząstek elementarnych.

Poszukiwanie globalnej, pierwotnej symetrii można ograniczyć do sektora leptonowego, a właściwie do testowania macierzy Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakaty (PMNS) w tym sektorze. Istnieją dwa główne powody takiego wyboru. Po pierwsze, poszukujemy symetrii przed spontanicznym złamaniem. W wyniku jej spontanicznego złamania, masy kwarków „up”, kwarków „down” i naładowanych leptonów różnią się znacznie pomiędzy generacjami. Trudno w takiej sytuacji zobaczyć istnienie tej symetrii. Po drugie, pozostaje poszukiwanie symetrii w oparciu o macierz Cabibbo-Kobayashiego-Maskawy (CKM). Z eksperymentu wiemy jednak, że pozadiagonalne elementy tej macierzy są bardzo małe i mogą być wynikiem poprawek perturbacyjnych fizyki poza MS, a nie wynikiem istnienia symetrii. Pozostaje więc macierz PMNS, która jest wyraźnie niediagonalna i przy coraz dokładniejszych eksperymentach ma coraz lepiej określone elementy (z dokładnością do faz łamiących symetrię CP, których nie znamy). Stąd będziemy koncentrować się na testowaniu symetrii w oparciu o macierz PMNS. Metoda badawcza w dużej mierze zależy od wyników eksperymentalnych, w szczególności z eksperymentów oscylacji neutrin. Powiązanie sektora neutrinowego z poszukiwaniem globalnej symetrii jest również atrakcyjne dlatego, że jest on pełen otwartych pytań takich

jak rozstrzygnięcie czy neutrino mają naturę Diraca czy Majorany, czy hierarchia mas tych cząstek jest normalna czy odwrócona? Istotnym jest także ustalenie masy najlżejszego neutrino oraz w zależności od natury tych cząstek, wyznaczenie wartości faz (dla neutrino Diraca jednej fazy, a dla neutrino Majorany trzech faz). Odpowiedzi na te pytania będą miały wpływ na kształt macierzy mieszania leptonów, a co za tym idzie mają one związek z postulowaną symetrią.

Celem niniejszej rozprawy jest przeanalizowanie kwestii istnienia możliwych symetrii macierzy PMNS. Nie licząc wstępu i podsumowania rozprawa doktorska składa się z trzech rozdziałów i trzech dodatków. W pierwszym rozdziale opisane są znane z literatury wiadomości wstępne potrzebne w dalszych rozważaniach. Omówione zostało w jaki sposób neutrino opisywane są w MS, czym jest leptonowa macierz mieszania i jak jest parametryzowana. Ważnym elementem tego rozdziału jest ustalenie konwencji i przyjęcie konkretnych definicji wielkości stosowanych w dalszej części pracy. Dodatkowo zaprezentowane zostały bieżące wyniki eksperymentów oscylacyjnych.

W kolejnych dwóch rozdziałach zawarty został opis możliwych symetrii. Podzielone one zostały na dwie grupy: symetrie abelowe i nieabelowe. Symetrie abelowe macierzy masowej leptonów analizowane są w kontekście tak zwanych tekstur zerowych, czyli macierzy masowych neutrino z konkretnymi elementami równymi zero. Rozdział im poświęcony zawiera dyskusję dwóch jakościowo różnych metod rekonstrukcji macierzy masowej neutrino. Prezentowane w tej części pracy wyniki mają charakter autorski. Ostatni rozdział poświęcony jest próbie powiązania relacji pomiędzy elementami macierzy masowej neutrino z nieabelowymi dyskretnymi symetriami rodzinnymi. Wobec braku satysfakcjonujących wyników zarówno własnych jak i literaturowych, część pracy odnosząca się do symetrii nieabelowych ma charakter opisowy. Podany jest tam sposób podejścia do symetrii nieabelowych stosowany w literaturze oraz zasugerowane są możliwe jego rozszerzenia stanowiące dalszy plan badawczy autora.

W dodatkach zawarte są: podstawowe definicje używane w rozprawie, twierdzenia dotyczące diagonalizacji macierzy oraz podstawienia obowiązujące we wzorach wyrażających parametry oscylacyjne macierzy mieszania PMNS przez elementy macierzy masowej neutrino.

## 2 Wprowadzenie

### 2.1 Masa neutrin w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach

Jednym z największych sukcesów fizyki cząstek elementarnych jest opis wszystkich obecnie znanych składników materii wraz z oddziaływaniami występującymi między nimi. Opis ten bazuje na kwantowej teorii pola i jest nazywany Modelem Standardowym cząstek elementarnych. Model ten, od początku jego sformułowania, znalazł potwierdzenie w licznych eksperymentach oraz przyczynił się do powstania jednego z największych eksperymentów w dziejach ludzkości LHC.

Składnikami materii, opisanymi w MS są fermiony, które mają spin połówkowy i opisywane są polami spinorowymi. Wszystkie kwarki oraz naładowane leptony mają naturę cząstek Diraca. Jedynie neutralne neutrina mogą mieć naturę Diraca lub Majorany.

Użyteczne dla tej sekcji pracy definicje znajdują się w Dodatku A.

Spinorami Weyla (oznaczenie:  $\phi, \chi$ ) nazywa się dwukomponentowe obiekty transformujące się względem obrotów i czystych transformacji Lorentza według reguł:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})}\phi, \quad (1)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})}\chi, \quad (2)$$

gdzie  $\vec{\theta}$  określa oś i kąt obrotu,  $\vec{\varphi}$  związany jest z kierunkiem pchnięcia (czyli czystej transformacji Lorentza), natomiast  $\vec{\sigma}$  to wektor macierzy Pauliego. Spinory  $\phi$  to spinory prawe natomiast  $\chi$  lewe.

Wprowadzając macierz:

$$\varepsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Lagranżjany opisujące pola Majorany mają postać odpowiednio dla pola prawego (1):

$$\mathcal{L}_P^M = \frac{i}{2}\phi^\dagger \left( \hat{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right) \phi + \frac{1}{2}m(\phi^T \varepsilon \phi - \phi^\dagger \varepsilon \phi^*), \quad (4)$$

natomiast dla pola lewego (2):

$$\mathcal{L}_L^M = \frac{i}{2}\chi^\dagger \left( \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right) \chi - \frac{1}{2}m(\chi^T \varepsilon \chi - \chi^\dagger \varepsilon \chi^*). \quad (5)$$



Często rozważa się czterekomponentowy obiekt zwany bispinorem Diraca:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Działając na spinor (6) operatorem rzutowym o określonej chiralności (patrz Dodatek (A), wzory od (196) do (204)) dostajemy dwa niezależne bispinory lewy i prawy, odpowiednio:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} , \quad (7)$$

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Zatem, pole Diraca  $\psi$  można zapisać jako kombinację niezależnych spinorów:

$$\psi = \psi_L + \psi_R . \quad (9)$$

Konstrukcja bispinora Diraca wymaga użycia dwóch różnych spinorów Weyla. Bispinor (6) spełnia równania Diraca, które można wyprowadzić ze swobodnego Lagranżjanu:

$$\mathcal{L}^D = \bar{\psi} \left( i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi . \quad (10)$$

Występujący we wzorze tym człon masowy Diraca ma postać:

$$\mathcal{L}^D = -m\bar{\psi}\psi = -m \left( \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R \right) , \quad (11)$$

a w zapisie dwukomponentowym:

$$\mathcal{L}^D = -m \left( \phi^\dagger \chi + \chi^\dagger \phi \right) . \quad (12)$$

Spinor Majorany przez analogię do (9) można zbudować korzystając tylko z jednego pola (7):

$$\psi = \psi_L + \psi_R^c , \quad (13)$$

gdzie, prawe pola  $\psi_R$  wyraża się poprzez pola lewe narzucając na nie tak zwany warunek Majorany (patrz Dodatek (A), wzory od (208) do (216)):

$$\psi_R^c = \mathcal{C}\bar{\psi}_L^T . \quad (14)$$

Oznacza to, że formalnie do konstrukcji bispinora Majorany używa się jednego spinora Weyla.

W podobny sposób możemy skonstruować bispinor Majorany używając pola prawego:

$$\psi = \psi_L^c + \psi_R. \quad (15)$$

Korzystając z relacji (13), człon masowy dla neutrin Majorany ze wzoru (5), w notacji czterokomponentowej można przepisać w postaci:

$$\mathcal{L}^{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}m \left( \bar{\psi}_R^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R^c \right) = -\frac{1}{2}m \bar{\psi} \psi. \quad (16)$$

Zdefiniujmy dwa wektory z obiektów transformujących się według tych samych reprezentacji:

$$\text{prawych: } \begin{pmatrix} \phi \\ \chi_c \end{pmatrix} \text{ oraz lewych: } \begin{pmatrix} \phi_c \\ \chi \end{pmatrix},$$

gdzie pola  $\chi_c \equiv -\varepsilon \chi^*$  oraz  $\phi_c \equiv \varepsilon \phi^*$ .

Rozważając Lagranżjany (4) oraz (5) dla pól prawych (1) i lewych (2), ogólny operator, który jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, możemy przedstawić jako:

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} \left( \phi_c^\dagger, \chi^\dagger \right) \begin{bmatrix} m_1 & m_D \\ m_D & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi_c \end{pmatrix} + h.c. \quad (17)$$

Operator (17) nazywamy członem masowym Majorany. Wszystkie wymienione powyżej Lagranżjany opisują człony masowe dla dwóch neutrin.

Aby skonstruować człon w postaci analogicznej do członu (17) ale w ogólnej sytuacji, czyli dla dowolnej ilości pól neutrin i nie zakładający ich charakteru, należy założyć istnienie  $n_L$  stanów:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \psi_R^c = \begin{pmatrix} -\varepsilon \chi^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

oraz  $n_R$  stanów:

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \phi^* \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Konstruujemy z nich  $m$  i  $n$  wymiarowe wektory, odpowiednio:

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \psi_{R1} \\ \psi_{R2} \\ \vdots \\ \psi_{Rm} \end{pmatrix}, \quad \Psi_L^c = \begin{pmatrix} \psi_{L1}^c \\ \psi_{L2}^c \\ \vdots \\ \psi_{Lm}^c \end{pmatrix}, \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{L1} \\ \psi_{L2} \\ \vdots \\ \psi_{Ln} \end{pmatrix}, \quad \Psi_R^c = \begin{pmatrix} \psi_{R1}^c \\ \psi_{R2}^c \\ \vdots \\ \psi_{Rn}^c \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Przy ich użyciu można teraz napisać najogólniejszy człon masowy będący sumą członów masowych Lagranżjanów Diraca (11) i Majorany (16):

$$\mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}^{\mathcal{D}} + \mathcal{L}^{\mathcal{M}}, \quad (21)$$

przyjmujący postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} = & -\frac{1}{2} \left( \bar{\Psi}_L, \bar{\Psi}_L^c \right) \begin{bmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R^c \\ \Psi_R \end{pmatrix} + \\ & + \left( \bar{\Psi}_R^c, \bar{\Psi}_R \right) \begin{bmatrix} M_L^\dagger & M_D^* \\ M_D^\dagger & M_R^\dagger \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_L^c \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

W zapisie dwukomponentowym można go przepisać jako:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} = & -\frac{1}{2} \left( \chi^\dagger M_L \chi^c + \chi^\dagger M_D \phi + \phi^{c\dagger} M_D^T \chi^c + \phi^{c\dagger} M_R \phi \right) + \\ & + \left( \chi^{c\dagger} M_L^\dagger \chi + \phi^\dagger M_D^\dagger \chi + \chi^{c\dagger} M_D^* \phi^c + \phi^\dagger M_R^\dagger \phi^c \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Pomiar skrzyżności w eksperymencie Goldhabera, z końca lat 50-tych ubiegłego wieku, wykazał, że neutrina są cząstkami lewoskrętnymi [1] zatem MS nie zawiera pól prawych dla tych cząstek. Historycznie w MS przyjęto by neutrina traktować jako cząstki bezmasowe.

W chwili obecnej wiemy z eksperymentów, że neutrina posiadają masę (szerza dyskusja w podrozdziale (2.2) oraz (2.3)), zatem MS wymaga rozszerzenia.

Możliwe jego rozszerzenia, w których neutrina opisywane są jako cząstki masowe (modele takie nazywa się ogólnie  $\nu$ SM) można podzielić na dwie grupy. W pierwszej z nich rozpatruje się rozszerzenia bez wprowadzania neutrin prawoskrętnych w drugiej modele, które je zawierają.

## 2.2 Oscylacje neutrin i macierz mieszania leptonów

Pierwszym badaczem, który w analogii do mieszania kaonów  $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$ , próbował doszukać się podobnego fenomenu w sektorze leptonowym był Pontecorvo. W swojej pracy [2] z 1957 roku opisał on możliwość przejścia neutrina elektronowego w swoją antycząstkę. W tym czasie, istnienie antyneutrina elektronowego było faktem zaobserwowanym przez Reinesa i Cowana [3, 4]. Jednocześnie w latach 1957-58 Davis [5] potwierdził, że neutrina nie są tożsame z antyneutrinami. Kolejnym istotnym krokiem było odkrycie w 1962 neutrina mionowego w eksperymencie przeprowadzonym w Brookhaven [6]. Jeżeli neutrina są masywne i podlegają mieszaniu to stało się oczywistym, że oscylacje neutrin zapachowych są możliwe. Maki, Nakagawa oraz Sakata w swojej pracy [7] z roku 1962 jako pierwsi opisali model mieszania różnych zapachów neutrin.

Pontecorvo miał swój udział w historii opisu fenomenu oscylacji neutrin jeszcze dwa razy. W roku 1967 przewidział problem deficytu w detekcji neutrin

elektronowych pochodzących ze Słońca (zwany jako problem neutrin słonecznych). Faktycznie w 1968 roku, w eksperymencie w Homestake [8], odnotowano niezgodności zebranych danych eksperymentalnych z przewidywaniami teoretycznymi. Pierwszą próbą wyjaśnienia tego eksperymentu było dopatrywanie się błędów w samym eksperymencie, jednak kolejne eksperymenty wykonywane przez kolaboracje Kamiokande [9], SAGE [10], GALLEX [11] nie pozostawiały złudzeń i potwierdzały wyniki otrzymane w Homestake. Pontecorvo opisał w swoich przewidywaniach deficyt neutrin elektronowych jako konsekwencję przejścia  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ .

W roku 1969 Pontecorvo wspólnie z Gribovem opublikowali pracę [12], w której opisali problem oscylacji neutrin słonecznych przez mieszanie neutrin. Ostateczne potwierdzenie hipotezy oscylacji neutrin miało miejsce w 1998 roku w eksperymencie w Kamiokande [13].

Oscylacje neutrin są efektem czysto kwantowym. Zachodzą one na skutek interferencji różnych stanów masowych neutrin. Neutrino o danym zapachu produkowane są, propagują się i podlegają detekcji jako koherentna superpozycja stanów masowych:

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha j} |\nu_j^m\rangle . \quad (24)$$

Najprostszy, formalnie niepoprawny, ale dający dobry końcowy wynik opis oscylacji neutrin wymaga poczynienia kilku założeń:

- wszystkie stany masowe  $|\nu_j^m\rangle$  składające się na koherentną superpozycję mają tę samą energię  $E$ , ale różne pędy  $p_j$ , wyrażone w przybliżeniu ultrarelatywistycznym jako:

$$p_j = \sqrt{E^2 - m_j^2} \simeq E - \frac{m_j^2}{2E} , \quad (25)$$

- neutrino propagują się w tym samym kierunku,
- czas propagacji jest proporcjonalny do odległości  $L$ .

Niech stan neutrino z określonym zapachem  $|\nu_\alpha\rangle$  w miejscu detekcji ( $L \neq 0$ ) będzie opisany jako:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(L)\rangle &= e^{-i(Ht-PL)} |\nu_\alpha(L=0)\rangle = \sum_{j=1}^3 e^{-i(Et-p_jL)} U_{\alpha j}^* |\nu_j^m\rangle \\ &\simeq e^{-iE(t-L)} \sum_{j=1}^3 e^{-i\frac{m_j^2L}{2E}} U_{\alpha j}^* |\nu_j^m\rangle . \end{aligned} \quad (26)$$

Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $|\nu_\alpha(L=0)\rangle$  do stanu  $|\nu_\beta\rangle$ , wyrażone jest jako kwadrat amplitudy prawdopodobieństwa:

$$P_{\alpha\rightarrow\beta}(L) = |\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(L)\rangle|^2 \simeq \left| \sum_{j=1}^3 e^{-i\frac{m_j^2 L}{2E}} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \right|^2. \quad (27)$$

Istotą występowania superpozycji jest bardzo mała różnica kwadratów mas poszczególnych stanów masowych definiowana jako:

$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2. \quad (28)$$

Nadmienić warto, że pełny, formalnie poprawny opis oscylacji neutrin opiera się na pakietach falowych. Jednak powyższy, skrótowy opis jest wystarczający dla wniosków dalszej części rozprawy.

Macierz  $U_{\alpha j}$  we wzorze (24) jest macierzą diagonalizującą macierz masową neutrin, o której mowa w dalszej części rozdziału (we wzorze (32)). Często utożsamia się ją z macierzą mieszania w leptonowych prądach naładowanych, nazywaną macierzą Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata ( $U_{PMNS}$ ).

Tak będzie zawsze wtedy gdy dla leptonów naładowanych pracujemy w bazie, w której ich macierz masowa jest już diagonalna. Trzeba jednak wziąć pod uwagę fakt, że na symetrię macierzy mieszania wpływa zarówno macierz masowa leptonów naładowanych, jak i macierz masowa neutrin.

Rozważymy Model Standardowy, a następnie jego uogólnienia. Będziemy też zakładać, że neutrina mają naturę Majorany. W modelu tym neutrina oddziałują z leptonami naładowanymi. Oddziaływanie z cząstką Higgsa i w prądach neutralnych z cząstką Z nie jest istotne dla rozważań zawartych w tej pracy.

Tak więc w bazie zapachowej mamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{l}'_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} W_\mu^- + h.c. \\ & + \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left( M_{\alpha,\beta}^l \bar{l}'_{\alpha R} l'_{\beta L} + M_{\alpha,\beta}^{l*} \bar{l}'_{\beta L} l'_{\alpha R} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left( M_{\alpha,\beta}^\nu \bar{\nu}_{\alpha R}^C \nu_{\beta L} + M_{\alpha,\beta}^{\nu*} \bar{\nu}_{\beta L} \nu_{\alpha R}^C \right), \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie:

$$\nu_{\alpha R}^C = i\gamma^2 \nu_{\alpha L}^*. \quad (30)$$

Macierz masowa leptonów naładowanych  $M_{\alpha,\beta}^l$  jest dowolną, trójwymiarową macierzą zespoloną, zaś dla neutrin  $M_{\alpha,\beta}^\nu$  jest dowolną symetryczną macierzą

zespoloną. W rozszerzeniach MS macierz  $M^\nu$  może mieć wymiar  $N > 3$ . Macierz  $M_{\alpha\beta}^l$  jest diagonalizowana przez transformację biunitarną (patrz Dodatek B - dowód Twierdzenia (1)):

$$\left(U_L^{l\dagger} M^l U_R^l\right)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} m_\alpha^l, \quad m_\alpha^l > 0. \quad (31)$$

Macierz masowa neutrin  $M_{\alpha\beta}^\nu$  diagonalizowana jest transformacją ortogonalną z macierzą zespoloną (patrz Dodatek B - dowód Twierdzenia (2)):

$$\left(U^{\nu\dagger} M^\nu U^{\nu*}\right)_{ij} = \delta_{ik} m_i^\nu, \quad m_i^\nu \geq 0. \quad (32)$$

Wprowadziliśmy więc nową bazę - bazę fizyczną dla macierzy masowych w których stają się one diagonalne:

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{i=1,2,3} U_{\alpha i}^\nu \nu_{iL} \quad \Rightarrow \quad \nu_{\alpha R} = \sum_{i=1,2,3} U_{\alpha i}^{*\nu} \nu_{iR}, \quad (33)$$

a także:

$$l'_{\alpha L} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(U_L^l\right)_{\alpha\beta} l_{\beta L} \quad \text{oraz} \quad l'_{\alpha R} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(U_R^l\right)_{\alpha\beta} l_{\beta R}. \quad (34)$$

Po takiej transformacji w oddziaływaniach prądów naładowanych pojawi się macierz mieszania:

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_{\substack{\alpha=e,\mu,\tau \\ i=1,2,3}} \bar{l}_{\alpha L} \gamma^\mu (U_{PMNS})_{\alpha i} \nu_{iL} W_\mu^- + h.c. , \quad (35)$$

gdzie:

$$(U_{PMNS})_{\alpha i} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(U_L^l\right)_{\alpha\beta}^\dagger (U^\nu)_{\beta i}, \quad (36)$$

jest macierzą mieszania noszącą nazwę Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakaty. W MS macierz  $U_{PMNS}$  pojawia się tylko w oddziaływaniach prądów naładowanych (35). W oddziaływaniach prądów neutralnych neutrina oddziałują z cząstkami  $Z_0$  i cząstkami Higgsa zachowując zapach, np.

$$\mathcal{L}_{NC} \sim \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} Z_\mu \sim \sum_{i=1,2,3} \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} Z_\mu , \quad (37)$$

co powoduje, że po przejściu do stanów fizycznych macierz mieszania nie pojawia się. Sytuacja zmienia się w różnych rozszerzeniach MS, gdy na przykład pojawiają się oddziaływania neutrin prawoskrętnych [14], albo prądy neutralne łamiące symetrię zapachową:

$$\mathcal{L}_{CC} \sim \sum_{\alpha} \bar{l}_{\alpha R} \gamma^\mu \nu_{\alpha R} W_\mu^+, \quad (38)$$

$$\mathcal{L}_{NC} \sim \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\beta L} Z_\mu, \quad (39)$$

wtedy w bazie fizycznej:

$$\mathcal{L}_{CC} \sim \sum_{\alpha i} \bar{l}_{\alpha R} \gamma^\mu \nu_{i R} (U_R)_{\alpha i} W_\mu^+, \quad (40)$$

gdzie:

$$(U_R)_{\alpha i} = \left( U_R^{l\dagger} U^{\nu*} \right)_{\alpha i}, \quad (41)$$

oraz:

$$\mathcal{L}_{NC} \sim \sum_{ij} \bar{\nu}_{i L} \gamma_\mu \Omega_{ij}^\mu \nu_{j L} Z_\mu, \quad (42)$$

gdzie:

$$\Omega_{ij}^\mu = \sum_{\alpha\beta} \left( U^{\nu\dagger} \right)_{i\alpha} g_{\alpha\beta} (U^\nu)_{\beta j}. \quad (43)$$

Widać, że w takich uogólnionych modelach więcej wielkości mogłoby podlegać pomiarowi, np. elementy macierzy  $U_R$  oraz  $\Omega$ . Nie mamy jednak w chwili obecnej żadnych informacji eksperymentalnych o takich dodatkowych oddziaływaniach. Model Standardowy poszerzony jedynie o człon mas neutrin dobrze tłumaczy obecne wyniki doświadczeń.

Skoncentrujemy się na sytuacji, w której wszystkie symetrie teorii tkwiące w postaciach macierzy masowych dla trzech naładowanych leptonów  $M^l$  i  $3+n$  neutrin  $M^\nu$  (gdzie  $n = 1, 2, 3$  oznaczają dodatkowe ciężkie neutrino sterylne) pojawiają się tylko przez masy i mierzone parametry macierzy  $U$  w prądzie naładowanym. Tak więc jedynie macierz masową  $3 \times 3$  dla neutrin możemy zrekonstruować w oparciu o obecne wyniki doświadczalne.

Trzeba pamiętać o tym, że macierz mieszania w prądzie naładowanym jest wyrażona w bazie masowych stanów własnych (36) zarówno naładowanych leptonów ( $e, \mu, \tau$ ) jak i neutrin ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ). Z tego powodu mamy dowolność w wyborze modeli teoretycznych. Możemy szukać symetrii:

(i) w bazie stanów własnych naładowanych leptonów, wtedy:

$$U_L^l = I \quad \text{ i } \quad U_{PMNS} = U_L = U^\nu, \quad (44)$$

(ii) w bazie stanów masowych stanów własnych neutrin, wtedy:

$$U^\nu = I \quad \text{ i } \quad U_{PMNS} = U_L^{l\dagger}, \quad (45)$$

(iii) albo w bazie, gdzie zarówno  $U_L^\nu \neq 0$  jak i  $U^\nu \neq 0$ , wtedy:

$$U = U_L^{l\dagger} U^\nu. \quad (46)$$

Wszystkie przypadki można znaleźć w literaturze najczęściej jednak wybieramy bazę (44).

W dalszej części pracy omówiona zostanie kwestia wpływu wyboru bazy na przyjętą globalną symetrię.

W bazie (44), w której macierz masowa leptonów naładowanych jest diagonalna, transformację (32) prowadzącą do diagonalizacji macierzy masowej neutrin, można po wprowadzeniu zapisać:

$$U_{PMNS} = U^\nu \equiv U , \quad (47)$$

przepisać jako:

$$U^T M_\nu U = m_{diag} . \quad (48)$$

Rozpatrzmy chwilowo sytuację ogólną i założmy, że macierz  $U$  i macierze masowe mają wymiar  $N \times N$ .

Unitarna macierz  $U$  o wymiarze  $N$ , zależy od  $\frac{N^2-N}{2}$  modułów oraz  $\frac{N^2+N}{2}$  faz. Jeżeli do tego dodamy  $N$  rzeczywistych elementów diagonalnej macierzy  $m_{diag}$ , otrzymamy taką liczbę parametrów jak w symetrycznej macierzy  $N$  wymiarowej:

$$N + \frac{N^2 - N}{2} + \frac{N^2 + N}{2} = N(N + 1), \quad (49)$$

a więc równa liczbie parametrów w neutrinowej macierzy masowej.

Nie wszystkie fazy macierzy  $U$  są dającymi się zmierzyć parametrami fizycznymi. Macierz  $U$  będziemy parametryzować w sposób:

$$U = f_{NF} \cdot U_D \cdot f_M . \quad (50)$$

Macierz  $f_{NF}$ :

$$\begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\beta_N} \end{pmatrix} , \quad (51)$$

jest diagonalną macierzą  $N$  niefizycznych faz, które w oddziaływaniu prądów naładowanych można wyeliminować.

Macierz  $U_D$  jest unitarną macierzą zawierającą tylko:  $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$  faz i wszystkie  $\frac{N^2-N}{2}$  moduły. Taka macierz opisuje mieszanie leptonów, gdy neutrina są cząstkami Diraca.



Macierz  $f_M$  jest diagonalną macierzą  $N - 1$  faz Majorany, którą będziemy parametryzować w sposób:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{(i\alpha_1)/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{(i\alpha_2)/2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{(i\alpha_{N-1})/2} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Macierz  $U_D$  skonstruowana jest z macierzy obrotów we wszystkich możliwych płaszczyznach o odpowiednio dołączonych  $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$  fazach.

Dla macierzy  $3 \times 3$  mamy:

$$U_D(3 \times 3) \equiv R_{23}^{(3)}(\theta_{23}, 0) R_{13}^{(3)}(\theta_{13}, \delta_{13}) R_{12}^{(3)}(\theta_{12}, 0), \quad (53)$$

gdzie,  $\delta_{13} \equiv \delta$  jest fizyczną fazą zmieniającą się w zakresie  $0 \leq \delta \leq 360^\circ$ . Nazywana jest ona fazą Diraca. Jest ona związana z łamaniem symetrii CP, analogicznie do fazy pojawiającej się w macierzy mieszania kwarków ( $U_{CKM}$ ). Trzeba zaznaczyć, że w dotychczasowych eksperymentach z udziałem neutrin, fazy Majorany mogą zostać wyeliminowane. Chociaż więc formalnie macierz  $U_{PMNS}$  zawiera fazy Majorany (co będzie istotne na przykład w podwójnym bezneutrinowym rozpadzie  $\beta$ ), w eksperymentach oscylacyjnych fazy te nie są mierzone i macierz mieszania przyjmuje się tak jak w (53).

Wprowadzając konwencję dotyczącą oznaczeń kątów mieszania  $\theta_{ij}$ :

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij}, \quad s_{ij} = \sin \theta_{ij}, \quad (54)$$

macierze obrotów zapisujemy jako:

$$R_{23}^{(3)}(\theta_{23}, 0) \Rightarrow U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$R_{13}^{(3)}(\theta_{13}, \delta_{13}) \Rightarrow U_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$R_{12}^{(3)}(\theta_{12}, 0) \Rightarrow U_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Zatem w postaci jawnej macierz  $U_D$  możemy zaprezentować jako:

$$U_D = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Przyjmuje się [15], że kąty mieszania  $\theta_{ij}$  zmieniają się w zakresie:  $0 \leq \theta_{ij} \leq 90^\circ$ .

Podsumowując: w przypadku trzech neutrin mamy dziewięć parametrów fizycznych. Trzy masy neutrin, trzy kąty mieszania oraz trzy fazy  $\delta, \alpha_1/2, \alpha_2/2$ . Dwie z tych faz ( $\alpha_1/2, \alpha_2/2$ ) nazywane są fazami Majorany. Jeśli neutrino ma naturę Diraca, to fazy te mogą być zaabsorbowane poprzez wciągnięcie ich w definicję pól neutrin.

### 2.3 Doświadczalne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin

Numeracja stanów masowych neutrin nie jest przyjęta arbitralnie. W pracy tej przyjmuje się konwencję:

$$m_1 < m_2 \quad (\Delta m_{21}^2 > 0), \quad \Delta m_{21}^2 < |\Delta m_{31}^2|. \quad (59)$$

W konwencji tej, przy założeniu istnienia trzech aktywnych neutrin, istnieją dwie możliwości (hierarchia normalna i odwrotna) wyznaczenia spektrum masy neutrin w zależności od znaku  $\Delta m_{31}^2$  (28):

- Hierarchia normalna :  $m_1 < m_2 < m_3$ .
- Hierarchia odwrotna:  $m_3 < m_1 < m_2$ .

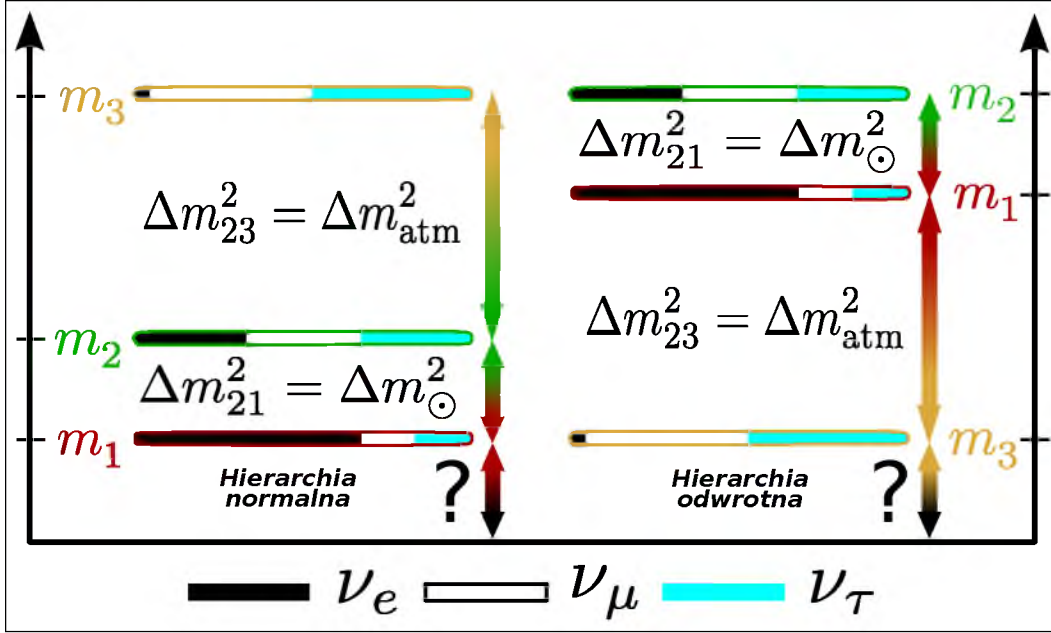
Najmniejsza różnica kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2$  jest związana z oscylacjami tak zwanych neutrin słonecznych i jest oznaczana jako  $\Delta m_\odot^2$ . Większa różnica kwadratów mas jest związana z tak zwanymi neutrinami atmosferycznymi i jest oznaczana jako  $\Delta m_{\text{atm}}^2$ .

Dla hierarchii normalnej:  $\Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{31}^2$ , natomiast dla hierarchii odwrotnej:  $\Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{23}^2$ .

Jednymi z najważniejszych zrealizowanych lub wciąż trwających eksperymentów oscylacyjnych są m.in: K2K [16], T2K [17], KamLAND [18], MINOS [19], OPERA [20], MiniBooNE [21], SAGE [22], Superkamiokande [23], SNO [24, 25], Amanda/IceCube [26], Borexino [27], DayaBay [28]. W Tabeli 2 zebrano opracowane przez różne grupy podsumowanie aktualnych wyników eksperymentów oscylacyjnych.

W eksperymentach oscylacyjnych mierzy się różnice kwadratów mas (28). Eksperymenty, w których można potencjalnie mierzyć masę neutrin (np. rozpad  $\beta$  trytu) mają niewystarczającą dokładność i istnieją jedynie górne ograniczenia na ich masę.

Historycznie, liczne pomiary przekrojów czynnych na procesy z udziałem neutrin wykazywały bardzo dużą zgodność z koncepcją bezmasowych



Rysunek 1: Hierarchia normalna i odwrotna.

neutrino. Ponadto, silnym wskazaniem na ich bezmasowość był eksperyment przeprowadzony w 1958 r. przez Goldhabera i jego grupę [1], gdzie dokonano pomiaru skrętności neutrino (o którym wspomniano w podrozdziale (2.1)). Wyniki tego eksperymentu wykazały, iż neutrino są cząstkami lewoskrętnymi, co bardzo dobrze zgadzało się z dwukomponentowym opisem bezmasowych neutrino w MS. Mimo dużej zgodności eksperymentalnej, Pauli jako pierwszy rozważał neutrino będące cząstkami z bardzo małą masą (dużo mniejszą od masy elektronu) [32]. Wskazano nawet eksperymentalną metodę pomiaru masy neutrino ze spektrum rozpadu  $\beta$ , którą zaproponowali Fermi oraz Perin [33, 34, 35]. Pierwsze pomiary ograniczyły masę neutrino do  $m_\nu \lesssim 250$  eV [36]. Obecnie ograniczenie to wynosi  $m_\nu \lesssim 2$  eV [15]. Uzyskano je w eksperymentach rozpadu  $\beta$  trytu (na poziomie 95 % C.L.) przeprowadzonych w Mainz [37] oraz w Troitsku [38], gdzie dla "średniej" masy neutrino:

$$m_\beta = \sqrt{\sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2}, \quad (60)$$

oszacowano odpowiednio:

$$m_\beta \leq 2.3 \text{ eV (Mainz)}, \quad m_\beta \leq 2.1 \text{ eV (Troitsk)}. \quad (61)$$

Otrzymane wyniki nie wykluczają hipotezy o niezerowej masie neutrino. Potwierdzają jednak fakt, że masy te są o wiele mniejsze od mas naładowanych

Parametr	Forero i wsp.	Fogli i wsp.	Gonzalez-Garcia i wsp.
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	$7.62 \pm 0.19$	$7.54^{+0.26}_{-0.22}$	$7.50 \pm 0.185$
$\Delta m_{31}^2 [10^{-3} \text{eV}^2]$	$2.55^{+0.06}_{-0.09}$ $-2.43^{+0.06}_{-0.07}$	$2.43^{+0.06}_{-0.10}$ $-2.42^{+0.11}_{-0.07}$	$2.47^{+0.069}_{-0.067}$ $-2.43^{+0.042}_{-0.065}$
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.320^{+0.016}_{-0.017}$	$0.307^{+0.018}_{-0.016}$	$0.30 \pm 0.013$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.427^{+0.034}_{-0.027}$ & $0.613^{+0.022}_{-0.040}$ $0.600^{+0.026}_{-0.031}$	$0.386^{+0.024}_{-0.021}$ $0.392^{+0.039}_{-0.022}$	$0.41^{+0.037}_{-0.025}$ & $0.59^{+0.021}_{-0.022}$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.0246^{+0.0029}_{-0.0028}$ $0.0250^{+0.0026}_{-0.0027}$	$0.0241 \pm 0.0025$ $0.0244^{+0.0023}_{-0.0025}$	$0.023 \pm 0.0023$
$\delta$	$(0.80 \pm 1)\pi$ $-(0.03 \pm 1)\pi$	$(1.08^{+0.28}_{-0.31})\pi$ $(1.09^{+0.38}_{-0.26})\pi$	$(1.67^{+0.37}_{-0.77})\pi$

Tabela 2: Podsumowanie parametrów oscylacyjnych dla neutrin. Dla  $\Delta m_{31}^2$ ,  $\sin^2 \theta_{23}$ ,  $\sin^2 \theta_{13}$ , i  $\delta$  górne (dolne) wartości odpowiadają hierarchii normalnej (odwróconej). W tabeli podane są wartości średnie oraz błędy na poziomie  $1\sigma$  opracowane przez trzy niezależne grupy. Wyniki pochodzą z prac: [29] (Forero i wsp.), [30] (Fogli i wsp.), [31] (Gonzalez-Garcia i wsp.).

leptonów i kwarków.

Ważną grupą eksperymentów są te związane z procesem podwójnego rozpadu  $\beta$ .

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e, \quad (2\nu\beta\beta). \quad (62)$$

Historycznie proces ten został zaproponowany przez Goeppert-Mayer [39]. Można go obserwować jako jednoczesny rozpad dwóch neutronów. Wkrótce po ukazaniu się prac Majorany, Recah [40] i Furry [41] przedyskutowali inny rozpad, możliwy tylko i wyłącznie wtedy, gdy zgodnie z hipotezą neutrina i antyneutrina są tożsame:

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^-, \quad (0\nu\beta\beta). \quad (63)$$

Jest on zwany podwójnym bezneutrinowym rozpadem  $\beta$ . Eksperymentalne potwierdzenie zajścia takiego rozpadu dałoby jednoznaczną i bezpośrednią odpowiedź co do natury neutrin. Jakkolwiek liczne eksperymenty nie dowodzą istnienia tego rozpadu [42], to jednak dają one ograniczenia na masę neutrin. Zawarte są one w Tabeli 3.

Eksperyment	$ m_{\beta\beta}  \lesssim$
Heidelberg-Moscow [43]	$(0.22 - 0.64) \text{ eV}$
NEMO3 [44, 45]	$(0.44 - 1.00) \text{ eV}$

Tabela 3: *Ograniczenia na masę z bezneutrinowego podwójnego rozpadu  $\beta$ .*

Parametr  $m_{\beta\beta}$  z Tabeli 3 jest efektywną masą neutrina Majorany definowaną jako:

$$|m_{\beta\beta}| = \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right|. \quad (64)$$

Planowane przyszłe eksperymenty to między innymi GERDA [46], CUORE [47], KamLAND-Zen [48], EXO [49], które powinny znacząco poprawić obecne ograniczenia do:  $|m_{\beta\beta}| \lesssim 10^{-2} \text{ eV}$ .

Obowiązujące ograniczenia na ilość aktywnych neutrin pochodzą z wyników eksperymentu LEP [50]. Są one związane z tak zwaną szerokością połówkową rozpadu cząstki  $Z^0$ . Doświadczenie to wykazało, że istnieją tylko trzy generacje neutrin o masie mniejsze niż  $\frac{M_Z}{2}$ , gdzie  $M_Z$  jest masą cząstki  $Z_0$ .

## 2.4 Analityczne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin

W tej części pracy zaprezentowana jest metoda uzyskania jednoznacznych, analitycznych wzorów, wyrażających parametry oscylacyjne macierzy mieszania  $U_{PMNS}$ , poprzez elementy macierzy masowej neutrin.

Podrozdział ten jest wynikiem własnym, opartym w całości na opublikowanej pracy [51].

Zakładamy, trzy generacje neutrin o naturze Majorany. Przy założeniu tym, macierz masowa neutrin, oznaczana jako  $\mathcal{M}_\nu$ , jest w ogólności symetryczną macierzą trójwymiarową o elementach zespolonych. Konstruujemy z niej hermitowską macierz  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{M}_\nu^\dagger \mathcal{M}_\nu. \quad (65)$$

W jawnej postaci, macierz (65) można zapisać jako:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & Be^{i\phi_1} & Ce^{i\phi_2} \\ Be^{-i\phi_1} & D & Ee^{i\phi_3} \\ Ce^{-i\phi_2} & Ee^{-i\phi_3} & F \end{pmatrix}, \quad (66)$$

w której parametry  $(A, B, \dots, \phi_1, \phi_2, \dots)$  mogą być w prosty sposób wyznaczone przez elementy macierzy  $\mathcal{M}_\nu$ .

Macierz ta jest diagonalizowana poprzez unitarną transformację:

$$\mathcal{W}^\dagger \mathcal{H} \mathcal{W} = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

gdzie unitarna macierz  $\mathcal{W}$ , jest zbudowana z wektorów własnych  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix}, \quad (68)$$

a wartości własne  $m_i^2$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) odpowiadają kwadratam mas. Z własności macierzy (65) wynika, że wartości te są rzeczywiste i nieujemne. Jest to pożądana własność, ze względu na to, że w eksperymentach mierzy się różnice kwadratów mas neutrin (patrz podrozdział (2.3)).

Faza wektorów własnych macierzy (68) nie zmienia wartości własnych (67). Zatem, możemy użyć tych faz tak by znaleźć macierz  $\mathcal{U}$ , diagonalizującą macierz masową neutrin  $\mathcal{M}_\nu$  tak jak w równaniu (48) z rzeczywistymi dodatnimi wartościami własnymi  $m_i$ .

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\chi_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Nowe fazy  $\chi_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) również zależą od elementów macierzy  $\mathcal{M}_\nu$ .

Macierz (69) zależy od 9 parametrów, co bezpośrednio koresponduje z ilością parametrów macierzy  $U$  (50) w standardowej parametryzacji. Porównując elementy macierzy (50) i (69) możemy znaleźć relacje pomiędzy kątami mieszania a elementami macierzy masowej neutrin:

$$\sin \theta_{13} = |x_3|, \quad \cos \theta_{13} = \sqrt{1 - |x_3|^2}, \quad (70)$$

$$\sin \theta_{23} = \frac{|y_3|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}, \quad \cos \theta_{23} = \frac{|z_3|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}, \quad (71)$$

$$\sin \theta_{12} = \frac{|x_2|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}, \quad \cos \theta_{12} = \frac{|x_1|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}. \quad (72)$$

Analogicznie możemy wyrazić fizyczne fazy Majorany ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) oraz fazę Diraca  $\delta$  poprzez elementy macierzy masowej:

$$\frac{\alpha_1}{2} = \omega_2 - \omega_1, \quad (73)$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = \omega_3 + \delta - \omega_1, \quad (74)$$

$$e^{-i\delta} = \frac{|x_1||x_3||z_3| + |z_1|e^{i(\tau_1+\omega_3-\tau_3-\omega_1)}}{1 - |x_3|^2}. \quad (75)$$

I podobnie dla faz niefizycznych ( $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$\beta_1 = \chi_1 + \omega_1, \quad (76)$$

$$\beta_2 = \chi_2 + \eta_3 - \omega_2 + \omega_1, \quad (77)$$

$$\beta_3 = \chi_3 - \delta - \omega_3 + \tau_3 + \omega_1, \quad (78)$$

gdzie:  $\omega_i = \text{Arg}(x_i)$ ,  $\eta_i = \text{Arg}(y_i)$ ,  $\tau_i = \text{Arg}(z_i)$  i  $\omega_1, \tau_3 = 0 \vee \pi$ .

Podstawienia obowiązujące we wzorach od (70) do (78) zawarte są w Dodatku C.

## 2.5 Wzorce symetrii macierzy mieszania

Można przyjąć hipotezę zakładającą, że kształt macierzy  $U_{PMNS}$  nie jest przypadkowy. Szczególnie atrakcyjną i szeroko dyskutowaną w ostatnich latach jest koncepcja istnienia rodzinnej dyskretnej grupy symetrii, która tłumaczy postać macierzy mieszania leptonów.

Przed rokiem 2012 dane pochodzące z eksperymentów neutrinowych zgadzały się z tak zwaną „trzy podwójnie maksymalną” (tribimaximal - TBM) macierzą mieszania, w literaturze znaną pod nazwą  $U_{TBM}$ . Zaproponowana została ona w 2002 roku przez Harisona, Perkinsa i Scotta [52]:

$$U_{TBM} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Trzecia kolumna tej macierzy odpowiada maksymalnemu mieszanemu stanów  $|\nu_\mu\rangle$  i  $|\nu_\tau\rangle$ :

$$|U_{\mu 3}| = |U_{\tau 3}| = 1/\sqrt{2}, \quad (80)$$

odpowiada to kątowi:

$$\sin \theta_{23} \approx 1/\sqrt{2} \Rightarrow \theta_{23} \approx \pi/4 \text{ czyli } 45^\circ. \quad (81)$$

Druga kolumna odpowiada za równe mieszanie trzech stanów  $|\nu_e\rangle$ ,  $|\nu_\mu\rangle$  i  $|\nu_\tau\rangle$ :

$$|U_{e2}| = |U_{\mu 2}| = |U_{\tau 2}| = 1/\sqrt{3}. \quad (82)$$

Koresponduje to z kątem  $\theta_{12} \approx 35^\circ$ .

Warto zauważyć, że dla:

$$U_{e3} = 0 , \quad (83)$$

kąt mieszania  $\theta_{13}$  jest równy 0 i macierz  $U_{PMNS}$  jest rzeczywista. Do roku 2012 wartość ta znajdowała potwierdzenie w danych wynikających z eksperymentów oscylacyjnych.

Kształt macierzy (79) może sugerować istnienie związku ze współczynnikami Clebscha-Gordona pewnej grupy symetrii. Obserwacja ta wywołała szeroki odzew wśród grup teoretycznych. Pojawiło się wiele modeli, które fenomenologicznie wyjaśniały pochodzenie wzorca TBM. Jedną z pierwszych propozycji, wysuniętą w 2004 roku w pracy [53], była hipoteza wiążąca macierz  $U_{TBM}$  z dyskretną grupą symetrii  $A_4$ . Jej pełne uzasadnienie ukazało się w roku 2005 [54, 55, 56, 57].

W przeciągu niemal dekady pojawiło się wiele innych propozycji próbujących z mniejszym lub większym powodzeniem związać macierz  $U_{TBM}$  z innymi dyskretnymi grupami symetrii lub jej wariacjami, takimi jak na przykład:  $U(1)^3 \times Z_2^3 \rtimes S_3$  [58],  $Z_2^3 \rtimes S_3$  [59],  $S_4$  [60, 61],  $T'$  [62, 63],  $\Delta(27)$  [64],  $\Delta(54)$  [65].

W roku 2012 pojawiły się nowe, dokładniejsze dane z eksperymentów mierzących kąt  $\theta_{13}$ . Okazało się, że kąt ten jest różny od zerowego. Obecnie mierzone wartości kąta  $\theta_{13}$  zaprezentowane są w Tabeli 4. Dane te wykluczy-

Eksperyment	$\sin^2 2\theta_{13}$
T2K	$0.140^{+0.038}_{-0.032}, 0.170^{+0.045}_{-0.037}$
DayBay	$0.090^{+0.008}_{-0.009}$
Minos	$0.095^{+0.035}_{-0.036}$
RENO	$0.100^{+0.025}_{-0.025}$

Tabela 4: *Pomiary „reaktorowego” kąta mieszania  $\sin^2 2\theta_{13}$  pochodzące z eksperymentów T2K[17], Daya Bay [28], MINOS[19], oraz RENO [66]. W przypadku eksperymentu T2K pierwsza wartość odpowiada normalnej hierarchii, a druga odwróconej.*

ły możliwość realizacji schematu TBM. W ich świetle powróciło pytanie o to, czy jakaś nowa symetria stoi za kształtem macierzy mieszania. Duża wartość kąta  $\theta_{13}$  może wykluczać te z propozycji, które upatrują rozwiązania w perturbacji schematu TBM. Spośród wielu ogólnych koncepcji próbujących wyjaśnić naturę mieszania w sektorze leptonowym w pracy tej przeanalizowane zostaną dwie.



Po pierwsze, wydaje się atrakcyjnym ponowne przeanalizowanie modeli z tak zwanymi teksturami zerowymi [67, 68, 69] macierzy masowej neutrin. Wiązane one są z symetriami abelowymi. Macierz mieszania leptonów związana jest, co zostało przedyskutowane we wprowadzeniu niniejszej rozprawy (patrz wzór (48)), z macierzą masową neutrin. Zatem, symetria macierzy masowej neutrin indukuje symetrię macierzy mieszania. Tekstury zerowe macierzy masowej przedyskutowane zostaną w rozdziale 3 niniejszej pracy.

Po drugie, w ramach obecnych danych eksperymentalnych (Tabela 2) poszukiwana jest symetria nieabelowa dająca pożądane relacje pomiędzy elementami macierzy masowej  $\mathcal{M}_\nu$ . Dyskusja takowa przeprowadzona jest w rozdziale 4 rozprawy.

### 3 Symetrie abelowe macierzy masowej leptonów z teksturami zerowymi

W literaturze przeanalizowanych zostało wiele interesujących propozycji ograniczenia kształtu macierzy masowej neutrin, a co za tym idzie ilości wolnych parametrów MS. Spośród wielu propozycji wymienić przykładowo można: tekstury zerowe [70, 71, 72, 73], modele zakładające znikanie minorów macierzy masowej [74, 75, 76], albo tak zwane tekstury hybrydowe [77, 78, 79, 80]. Szczególnie intensywnie studiowane są te pierwsze.

Poprzez tekstury zerowe macierzy masowej neutrin, rozumie się takie ich wzorce, które zakładają zerowe, lub bliskie zeru konkretne jej elementy. Za takimi postaciami macierzy masowej mogą się kryć symetrie rodzinne.

Zauważono na przykład [81], że zera macierzy masowej neutrin Diraca ( $M_D$ ) i macierzy masowej ciężkich prawoskrętnych neutrin Majorany, ( $M_R$ ) mogą reprodukować się jako zera w niskoenergetycznej efektywnej macierzy masowej neutrin, poprzez tak zwany mechanizm „huśtawki” („seesaw”) [82, 83, 84]. W modelach „seesaw” masę lekkich neutrin, w dobrym przybliżeniu, dostaje się poprzez diagonalizację macierzy masowej w postaci:

$$M_\nu = M_D M_R^{-1} M_D^T . \quad (84)$$

W ogólności tekstury zerowe macierzy masowej neutrin można otrzymać jako realizację abelowych symetrii rodzinnych przy założeniu rozszerzonego sektora skalarnego Modelu Standardowego [85].

Problem rekonstrukcji macierzy masowej neutrin można od strony metodologicznej podzielić na dwie kategorie. Funkcjonują one pod nazwami „top-down” i „bottom-up”.

W pierwszym podejściu - „top-down”, postać macierzy masowej (jej tekstura, symetrie, etc.) jest założeniem wynikającym z przyjętego modelu a co za tym idzie możliwych globalnych symetrii. Wszystkie parametry takie jak: masy neutrin, kąty mieszania i fazy, uzyskuje się z założonej macierzy masowej neutrin. Sposób ich otrzymania przedstawiony jest w poprzednim rozdziale. Weryfikacją przyjętego modelu jest zgodność uzyskanych wyników z danymi eksperymentalnymi.

W podejściu „bottom-up”, w ramach obowiązujących ograniczeń eksperymentalnych dla obserwabli (kątown mieszania, różnic kwadratów mas), poszukuje się dozwolonych tekstur macierzy masowej neutrin. Najczęściej testuje się te modele przy użyciu metod numerycznych.

Niniejszy rozdział poświęcony jest dyskusji jednej i drugiej metody. Omówione zostaną nasze wyniki, poszukiwania symetrii, uzyskane przy zastosowaniu obu metod.

### 3.1 Przykład realizacji symetrii abelowej dla tekstury z dwoma zerami

Uniwersalny przepis dotyczący realizacji symetrii dla tekstur zerowych zarówno dla kwarkowych, jak i leptonowych macierzy masowych można znaleźć w pracy [86]. Istnienie zer w fermionowych macierzach masowych jest konsekwencją wynikającą z wprowadzenia abelowych symetrii rodzinnych. Szczególną podgrupą są wzorce z dwoma elementami macierzy masowej równymi zero. Są one istotne, ponieważ dobrze opisują zarówno sektor kwarkowy jak i leptonowy. Dla leptonów dają informacje o ich masach i macierzy mieszania. Wzorce z dwoma zerami są ważne również dlatego, że są zgodne z niektórymi specyficznymi realizacjami modeli Wielkiej Unifikacji [87].

Na długo przed „rewolucją” związaną z pomiarem niezerowego kąta  $\theta_{13}$  istniało fenomenologiczne ograniczenie na ilość dozwolonych realizacji możliwych tekstur z dwoma zerami [70]. Dla  $n$  niezależnych, równych zero parametrów macierzy masowej istnieje:

$$k = \frac{6!}{n!(6-n)!} , \quad (85)$$

kombinacji możliwych tekstur zerowych. Spośród wszystkich 15 kombinacji dwóch zerowych parametrów macierzy masowej neutrin realizowanych było tylko 7. Zaprezentowane są one w Tabeli 5. Terminologia dotycząca nazw poszczególnych tekstur zerowych, używana w dalszej części rozprawy, zgodna jest z nazewnictwem przyjętym w pracy [70]. Obecnie jednak, nowe dane

$A1$	$A2$	$B1$	$B2$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ X & X & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & 0 \\ X & 0 & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & 0 & X \\ 0 & X & X \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$
$B3$	$B4$	$C$	-
$\begin{pmatrix} X & 0 & X \\ 0 & 0 & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & 0 \\ X & X & X \\ 0 & X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & 0 & X \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$	-

Tabela 5: *Siedem dozwolonych tekstur z dwoma zerami, o których mowa jest w pracy [70].*

doświadczalne ograniczyły liczbę możliwych tekstur zerowych. Taka analiza przeprowadzona jest w podrozdziale 3.2. Dwie, spośród siedmiu wyżej wymienionych klas, tekstur z dwoma zerami macierzy masowej neutrin, można

uzyskać [88] z grupy  $A_4$ , lub jej cyklicznej podgrupy  $Z_3$  w powiązaniu z modelem „seesaw” (typ I+II) [15]. Realizację symetrii dla modelu „seesaw” II-go typu dla wszystkich dozwolonych wzorców z dwoma zerami prezentuje praca [89].

Poniżej zamieszczony jest przykład [90] użycia cyklicznej symetrii  $Z_3$  do odtworzenia tekstury  $A_1$  zakładając, że macierz masowa powstaje poprzez działanie mechanizmu „seesaw” I i II typu (podobnie jak w teoriach wielkiej unifikacji). W takim przypadku, relacja (84) przechodzi w:

$$M_\nu = M_L - M_D M_R^{-1} M_D^T, \quad (86)$$

gdzie  $M_L$  opisuje masę Majorany dla pól lewoskrętnych.

Niech pola leptonowe transformują się zgodnie z:

$$\begin{aligned} D_{L_e} &\rightarrow \omega^2 D_{L_e}, & e_R &\rightarrow \omega^2 e_R, & \nu_{R1} &\rightarrow \omega \nu_{R1}, \\ D_{L_\mu} &\rightarrow D_{L_\mu}, & \mu_R &\rightarrow \mu_R, & \nu_{R2} &\rightarrow \nu_{R2}, \\ D_{L_\tau} &\rightarrow \omega D_{L_\tau}, & \tau_R &\rightarrow \omega \tau_R, & \nu_{R3} &\rightarrow \nu_{R3}, \end{aligned} \quad (87)$$

gdzie:

$$\omega = e^{(2i\pi/3)}, \quad (88)$$

jest generatorem cyklicznej grupy  $Z_3$ , natomiast  $D_{L_j}$ , ( $j = e, \mu, \tau$ ) to dublety leptonowe. Transformacje te generują diagonalną macierz masową leptonów naładowanych  $M_l$ . Biliniowe produkty  $\bar{D}_{L_j} \nu_{R_k}$  oraz  $\nu_{R_j} \nu_{R_k}$  związane z macierzą  $M_D$  oraz odpowiednio z macierzą  $M_R$  transformują się zgodnie z:

$$\bar{D}_{L_j} \nu_{R_k} \sim \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega & \omega \\ \omega & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\nu}_{R_j} C \bar{\nu}_{R_k}^T \sim \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Zakładając, że dublet Higgsa transformuje się trywialnie względem grupy  $Z_3$ , macierz  $M_D$  przybiera formę:

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X \\ X & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Przyjmując, że zespolony skalarny singlet  $\chi$  transformuje się względem grupy  $Z_3$  zgodnie z regułą:  $\chi \rightarrow \omega^2 \chi$ , macierz  $M_R$  przybiera postać:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Po zastosowaniu mechanizmu „seesaw” I-go rodzaju, dostaje się macierz masową neutrin w postaci:

$$M_\nu^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Biliniowy człon  $D_{L_j}^T C^{-1} D_{L_k}$  związany z macierzą  $M_L$  transformuje się względem symetrii  $Z_3$  jako:

$$D_{L_j}^T C^{-1} D_{L_k} \sim \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Wprowadźmy, skalarny względem grupy  $SU(2)$ , tryplet Higgsa, zapisany w macierzowej notacji dwuwymiarowej jako:

$$\Delta = \begin{pmatrix} H^+ & \sqrt{2}H^{++} \\ \sqrt{2}H^0 & -H^+ \end{pmatrix}, \quad (94)$$

który jest niezmiennikiem ze względu na grupę  $Z_3$ . Próżniowa wartość oczekiwana (VEV) dla trypletu Higgsa wynosi:

$$\langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_t & 0 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

gdzie:  $\langle H^0 \rangle_0 = \frac{v_t}{\sqrt{2}}$ .

Przy poczynionych założeniach wkład mechanizmu „seesaw” II rodzaju do macierzy  $M_L$  (wzór (86)) ma postać:

$$M_\nu^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & X & 0 \\ X & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Efektywna macierz masowa neutrin  $M_\nu$  po zastosowaniu mechanizmu „seesaw” I-go i II-go rodzaju jest sumą macierzy (92) oraz (96), ma więc postać:

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}, \quad (97)$$

która odpowiada teksturze  $A1$ . Warto zauważyć, że żądanie abelowej symetrii (88) prowadzi do diagonalizacji macierzy masowej dla naładowanych leptonów.

### 3.2 Tekstury zerowe dla neutrin majorany w przypadku zachowanej symetrii CP

Dyskusja zawarta w tej części rozprawy oparta jest na numerycznej metodzie zaprezentowanej w pracy [91]. Na jej potrzeby stworzony został program komputerowy w języku FORTRAN, który w oparciu o metodę „top-down”, służy do weryfikacji zgodności omawianych tekstur z danymi doświadczalnymi. Założeniem tej analizy jest przebadanie symetrycznej, rzeczywistej, trójwymiarowej macierzy masowej neutrin, a więc zakładając brak łamania symetrii CP. Symetryczność macierzy masowej neutrin jest tożsama z przyjęciem natury Majorany neutrin. Używana w programie macierz masowa przyjmuje postać:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Pomimo założenia braku łamania symetrii CP dla neutrin Majorany, wnioski płynące z analizy nie są trywialne, co zostanie wykazane w dalszej części rozdziału.

Aby zobaczyć w jaki sposób coraz bardziej precyzyjne wyniki (w szczególności wykrycie, że  $\theta_{13} \neq 0$ ) dyskusję przewidywań teoretycznych podzielono na dwie części. Zaprezentowane zostaną oryginalnie opublikowane rozwiązania, zgodne z danymi oscylacyjnymi właściwymi dla czasu ich publikacji jak również nowe, opracowane a zgodne z bieżącymi danymi.

#### 3.2.1 Opis algorytmu weryfikacji tekstur zerowych

Zadaniem opracowanego programu numerycznego jest znajdowanie takich wartości parametrów macierzy masowej neutrin  $\mathcal{M}_\nu$ , które poprzez relację (48), wyznaczają elementy macierzy mieszania oraz różnice kwadratów mas zgodne z danymi eksperymentalnymi. Aby sprawdzić wszystkie kombinacje parametrów użyjemy adaptacyjnej metody Monte Carlo (AMC - Adaptive Monte Carlo). Poniższy podrozdział opisuje algorytm tego programu.

Działanie programu dzieli się na dwa etapy. W pierwszej kolejności generowane są losowe parametry wejściowe, czyli elementy macierzy masowej neutrin. Kształt tej macierzy: ilość przyjętych jej elementów równych zero, jest kontrolowany przez użytkownika. Za pomocą odpowiednich bibliotek numerycznych (NAG [92]) macierz ta jest diagonalizowana. Uzyskane wektory oraz wartości własne są porównywane z danymi eksperymentalnymi. Akceptowane i zapamiętywane są wyniki losowania, które dają mieszczące się w granicach błędów wielkości mierzone. Pierwszy etap jest bardzo czasochłonny. Spośród wszystkich sprawdzanych kombinacji, wyniki losowania zgodne z

ewidencją eksperymentalną, stanowią znikomą część (rzędu  $10^2$  spośród  $10^9$  losowań). Aby efektywnie, w dużo krótszym czasie, znaleźć szersze spektrum zgodnych z eksperymentem wyników, można ich poszukiwać w bliskim sąsiedztwie już zaakceptowanych i zapamiętanych wyników. Jest to czynione w drugim kroku działania programu numerycznego.

Drugi etap działania programu inicjuje algorytm AMC. W algorytmie tym jako dane wejściowe używany jest zbiór punktów wygenerowanych w etapie pierwszym. Procedura ma za zadanie poszukiwać dodatkowych rozwiązań, w małych przedziałach wokół już uzyskanych wyników. Dodatkowo spośród poszerzonego spektrum rozwiązań program wyznacza te z nich, które mają najmniejszą wartość  $\chi^2$ . Dla każdego zbioru punktów, uzyskanych w etapie pierwszym, program wykonuje  $N_{it}$  iteracji, w każdej iteracji sukcesywnie ograniczając przedział w którym losowane są wartości macierzy masowej. Dla każdego z tych przedziałów, macierz masowa losowana jest i diagonalizowana, a następnie porównywana z ewidencją eksperymentalną  $N_{calc}$  razy. W rezultacie uzyskuje się dodatkowe punkty będące w zgodności z danymi eksperymentalnymi. Tak przeprowadzona procedura w kroku drugim może być  $10^4$  razy szybsza niż w kroku pierwszym, jednocześnie znajdując  $10^4$  więcej rozwiązań.

Na rysunku 2 (na stronie 30) zobrazowany jest przykładowy wynik działania pierwszego oraz drugiego etapu programu numerycznego dla tekstury A1 przy wartościach  $N_{scat} = N_{it} = N_{calc} = 100$ . Szersze omówienie tej tekstury znajduje się w dalszej części pracy.

By zobrazować uzyskane wyniki, należy mieć na uwadze, że możliwa jest jedynie takowa ich prezentacja, która uwzględnia korelację na jednym wykresie, co najwyżej trzech różnych elementów macierzy. We wszystkich zamieszczonych w pracy wykresach korelacyjnych wykresach, dla poprawy ich czytelności, prócz oryginalnie otrzymanych punktów, przedstawione są rzutowania na odpowiednie podprzestrzenie wykresów.

Poniżej zamieszczony jest szczegółowy opis etapów działania programu.

#### (a) Pierwszy etap

*Losowe generowanie parametrów wejściowych:*

Dla każdej  $n$ -tej iteracji ( $n = 1, 2, \dots, N_{scat}$ ) program generuje zbiór wejściowych parametrów - elementów macierzy masowej neutrin. Ilość iteracji jest kontrolowana przez użytkownika.

*Diagonalizacja macierzy masowej neutrin  $\mathcal{M}_\nu$ :*

Dla każdej losowej macierzy masowej neutrin program wyznacza wartości własne, które utożsamia się z masami neutrin oraz znormalizowane wektory własne. Wartości własne służą do wyznaczenia różnic kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2$  oraz  $\Delta m_{32}^2$ . Elementy znormalizowanych wektorów

własnych utożsamia się z wartościami modułów macierzy mieszania neutrin.

Algorytm programu jest w stanie rozróżnić normalną i odwrotną hierarchię mas.

*Porównanie danych z wynikami eksperymentalnymi:*

Kryterium służącym do przyjęcia wylosowanej macierzy masowej neutrin jest test  $\chi^2$  dla uzyskanych wektorów i różnic kwadratów mas. Oznaczając przez  $x_i$  wyniki losowania, a przez  $x_i^{cent}$  eksperymentalnie otrzymane centralne wartości  $\chi^2$  obliczamy jak zwykle, w sposób:

$$\chi_i^2 = \frac{(x_i^{cent} - x_i)^2}{\left(\frac{\sigma_i}{\alpha}\right)^2}, \quad (99)$$

gdzie,  $\sigma_i^2$  są niepewnościami pomiarowymi na poziomie  $3\sigma$ , zmierzonych eksperymentalnie kwadratów mass oraz wartości modułów macierzy mieszania.

Parametr  $\alpha$  daje użytkownikowi możliwość skalowania założonego błędu pomiarowego. Dla  $\alpha = 1$  test  $\chi^2$  weryfikuje zgodność losowanych punktów dokładnie na poziomie  $3\sigma$ . Przy wartości  $\alpha > 1$  zgodność losowanych punktów z danymi eksperymentalnymi badana jest w węższym przedziale.

Zachowywane są zarówno elementy losowanej macierzy masowej neutrin, jak i odpowiadające im numerycznie uzyskane elementy macierzy mieszania wraz z odpowiadającymi im masami neutrin.

Celem pierwszego etapu jest uzyskanie wstępnych, losowo rozrzuconych punktów, w hiperprzestrzeni o wymiarze zadany ilością niezerowych elementów macierzy masowej.

(b) Drugi etap: metoda AMC

*Wczytanie danych wejściowych:*

Program odczytuje każdy  $n$ -ty ( $n = 1, 2, \dots, N_{Scat}$ ) zestaw danych  $x_i$ , wygenerowanych w pierwszym kroku oraz ustawia je jako nowe wartości centralne  $x_i^{cent}$ .

Następnie dla każdego  $i$ -tego kroku ( $i = 1, 2, \dots, N_{it}$ ) zawężany jest obszar wokół którego losowane będą nowe dozwolone rozwiązania, zgodnie z regułą:

$$x_i^{cent} \pm \xi_{it}\delta_i, \quad (100)$$

gdzie  $\delta_i$  jest początkowym zakresem, a  $\xi_{it}$  funkcją zdefiniowaną jako:

$$\xi_{it} = \begin{cases} 1 & it = 0, \\ 0.6/it & it > 0. \end{cases} \quad (101)$$



Zarówno stała liczbowa 0.6 jak i funkcja  $1/it$  dobrane są w sposób empiryczny.

Analogicznie jak w pierwszym etapie działania programu, wykonywane są kolejno  $N_{calc}$  ilość razy obliczenia:

- (1) *Losowe generowanie parametrów.*
- (2) *Diagonalizacja.*
- (3) *Porównanie z ewidencją eksperymentalną i zapis zgodnych z nią wyników.*

*Wyznaczenie nowych wartości centralnych:*

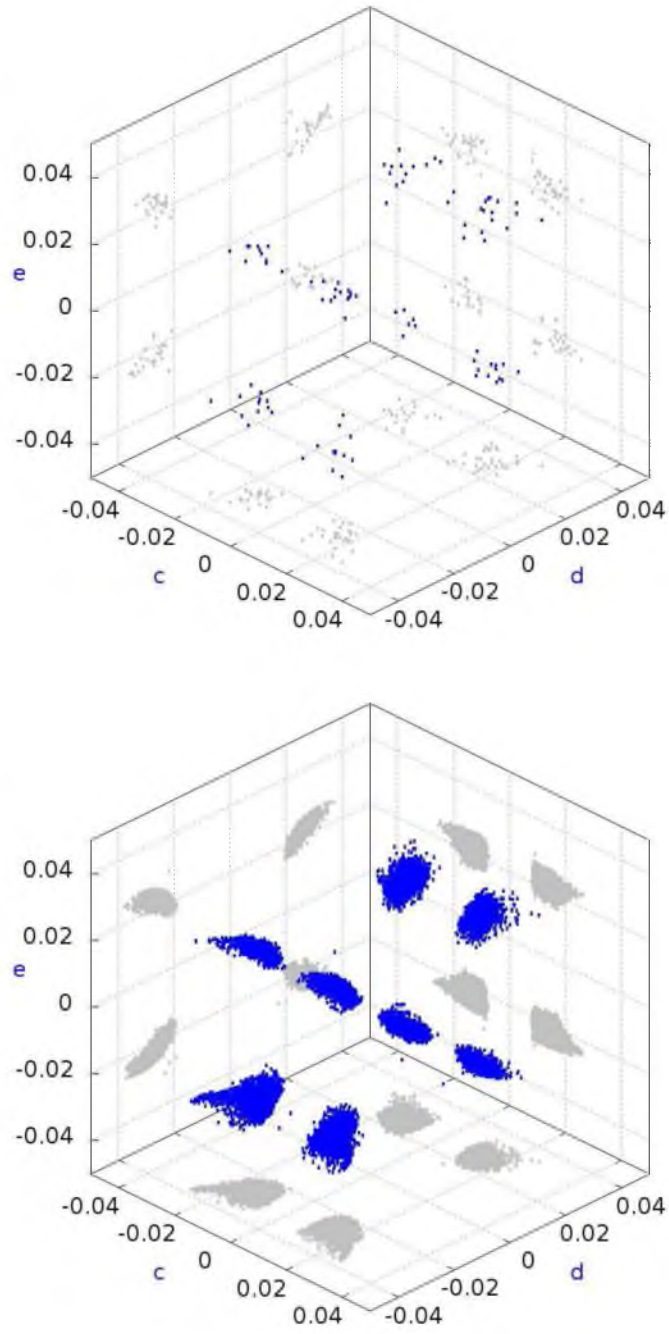
Po każdej iteracji wybierany jest ten zestaw punktów, dla których wartość  $\chi^2$  jest najmniejsza:

$$\chi^2 = \sum_{i=1} \chi_i^2. \quad (102)$$

i ustawiany jest jako nowa wartość centralna.  $x_i^{cent}$ . Należy zauważyć, że wraz ze wzrostem  $it$ , wartość funkcji  $\xi_{it}$  maleje. Tak więc, wraz ze wzrostem  $it$  zakres w którym losuje się parametry będzie malał jednocześnie wartość centralna będzie przesuwać się do najbardziej prawdopodobnej.

W etapie drugim również zachowywane są zarówno elementy macierzy mieszania neutrin jak i opowiadające im wektory własne wraz z wartościami własnymi.

Rozważana jest macierz masowa neutrin z rzeczywistymi elementami, tak więc, uzyskane w wyniku działania programu wektory własne porównywane muszą być z modułami macierzy mieszania uzyskanymi eksperymentalnie. Implikuje to fakt niemożności przypisania znaków kątom mieszania.



Rysunek 2: Tekstura A1. Pierwszy (wykres górny) i drugi (wykres dolny) etap losowania. Wykresy uzyskane dla  $N_{scat} = N_{calc} = N_{it} = 100$ .

### 3.2.2 Krótki przegląd wyników opartych na starych, mniej precyzyjnych danych doświadczalnych

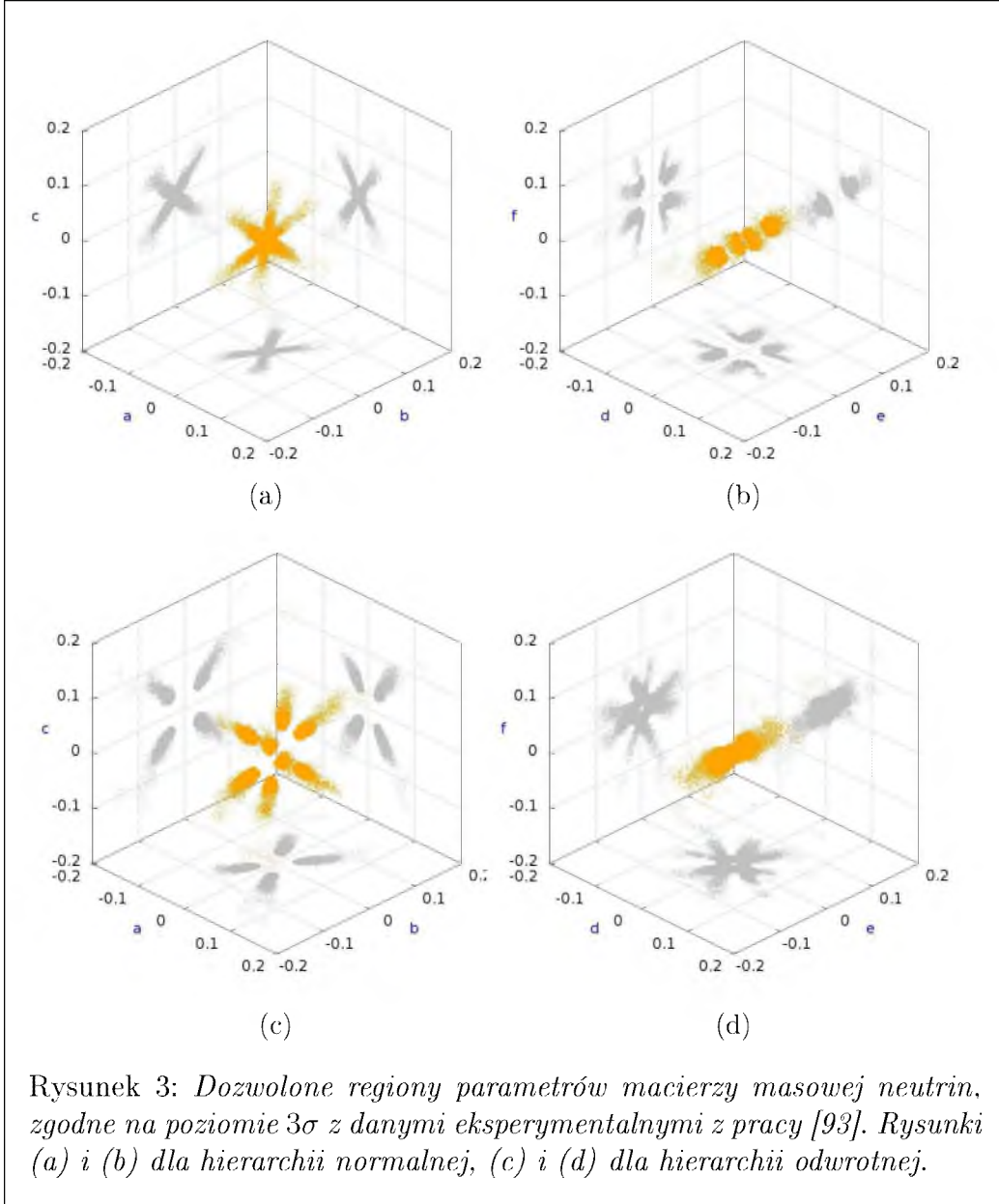
Zaprezentowane tu wyniki analizowane były [91] przy ograniczeniach na moduły elementów macierzy mieszania oraz różnicach kwadratów mas pochodzących z pracy [93], a zamieszczonych w Tabeli 6. Zauważyć należy, że w pracy tej, mimo braku w tamtym okresie potwierdzenia eksperymentalnego, zakładano górne ograniczenie dla kąta  $\theta_{13}$  różne od zera.

$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$\sigma_i$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$8.3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.835	0.045
4	$ U_{e2} $	0.54	0.07
5	$ U_{e3} $	0.1	0.1
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.165
7	$ U_{\mu 2} $	0.575	0.155
8	$ U_{\mu 3} $	0.7	0.12
9	$ U_{\tau 1} $	0.365	0.165
10	$ U_{\tau 2} $	0.59	0.15
11	$ U_{\tau 3} $	0.685	0.125

Tabela 6: Dozwolone wartości centralne i błędy na poziomie  $3\sigma$  modułów macierzy mieszania  $|U_{ij}|$  oraz różnic kwadratów mas  $\Delta m_{32}^2$ ,  $\Delta m_{21}^2$  pochodzące z pracy [93].

Ogólne rozwiązania, czyli takie dla których nie zakładano żadnych zer w diagonalizowanej macierzy masowej, przedstawione są na rysunku 3 (na stronie 32) dla przykładowej korelacji pomiędzy parametrami a,b,c oraz odpowiednio d,e,f w macierzy (98). Pozostałe korelacje dla tego przypadku dostępne są na stronie internetowej [94]. Można z nich szacować, w jakich przedziałach znajdują się rozwiązania dla konkretnych tekstur zerowych. Spektrum częstotliwości występowania konkretnych elementów macierzy masowej, dla rozwiązań ogólnych, prezentują histogramy zamieszczone na rysunku 4 (na stronie 33), dla hierarchii normalnej oraz odpowiednio na rysunku 5 (na stronie 33), dla hierarchii odwrotnej. Brak symetryczności histogramów względem zera jest efektem związanym z dokładnością obliczeń numerycznych.

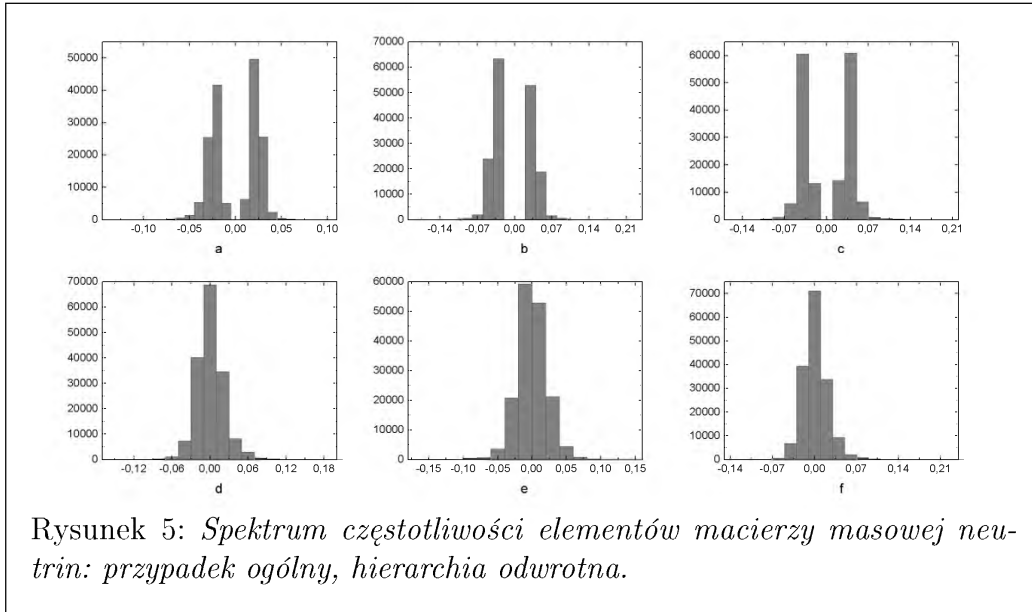
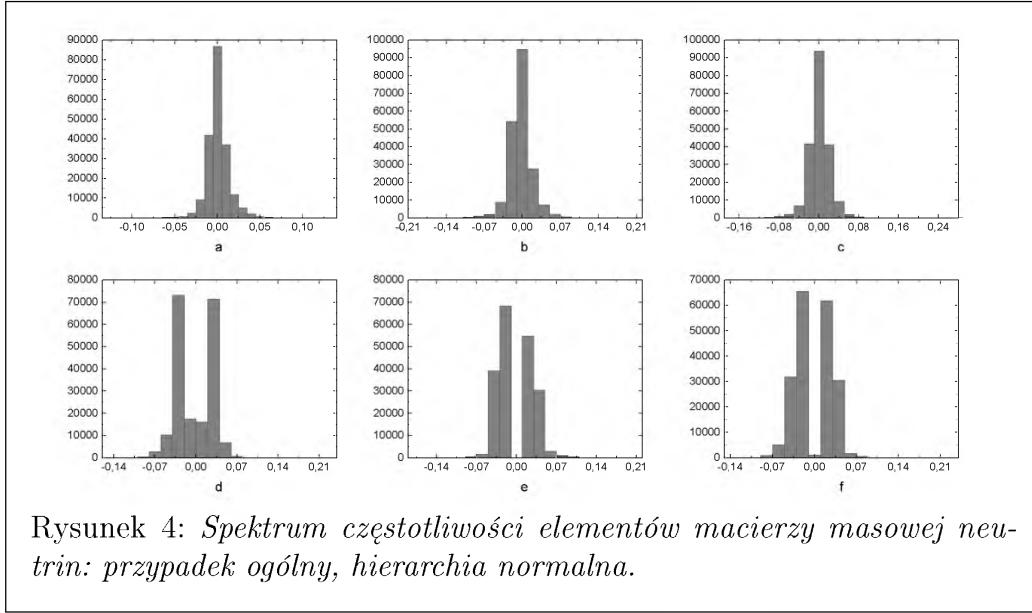
Z przeanalizowanych 6-ciu możliwych tekstur zerowych, przy założeniu błędu na poziomie  $3\sigma$  (czyli dla  $\alpha = 1$ ) dozwolone były wszystkie z wyjątkiem jednego przypadku: nie była realizowana tekstura z parametrem  $a = 0$  (oznaczana jako A) dla hierarchii odwrotnej. Generalnie, tekstury z elementem  $a = 0$ , bez względu na ilość innych niezależnych parametrów macierzy masowej równych 0, są istotne ponieważ związane są z przekrojem czynnym



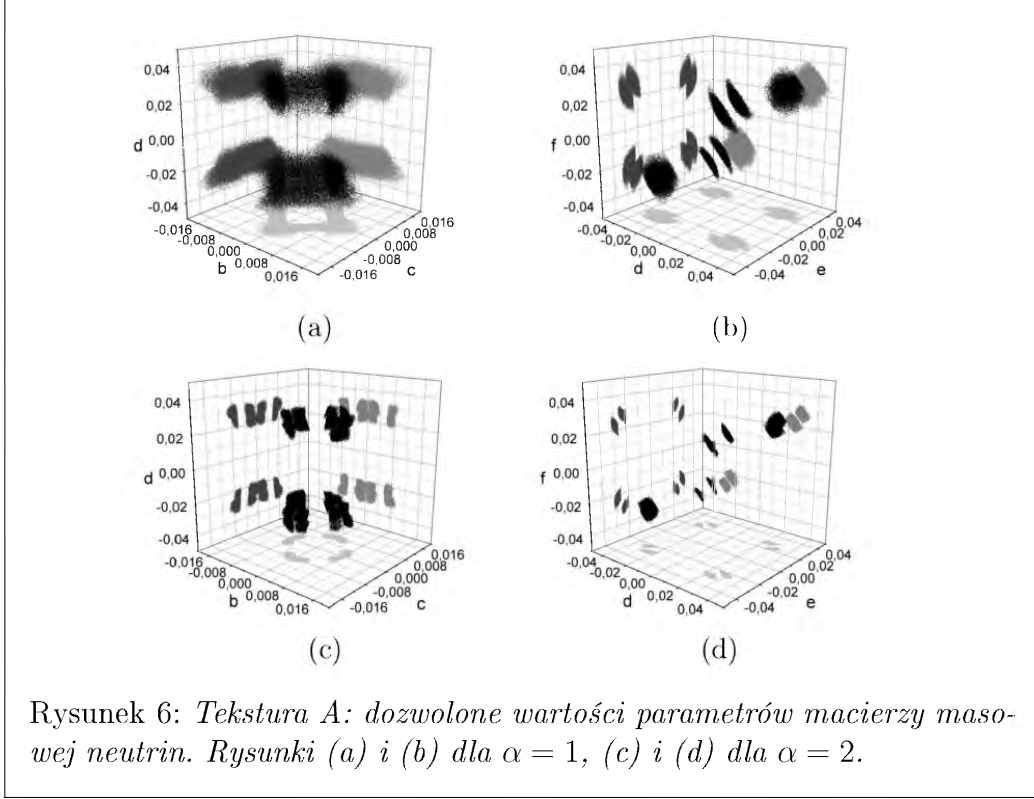
na bezneutrinowy rozpadu  $\beta$  ( $\sigma_{0\nu\beta\beta}$ ) poprzez relację:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{0\nu\beta\beta} \sim \langle m_{ee} \rangle = \sum_{i=1}^3 U_{ei}^2 m_i = 0. \quad (103)$$

Efektywny parametr (64) (patrz strona 17), oznaczany dalej jako  $\langle m_{\beta\beta 0\nu} \rangle$ , jest dla takich tekstur równy zero [95]. Wyklucza to istnienie tego rozpadu



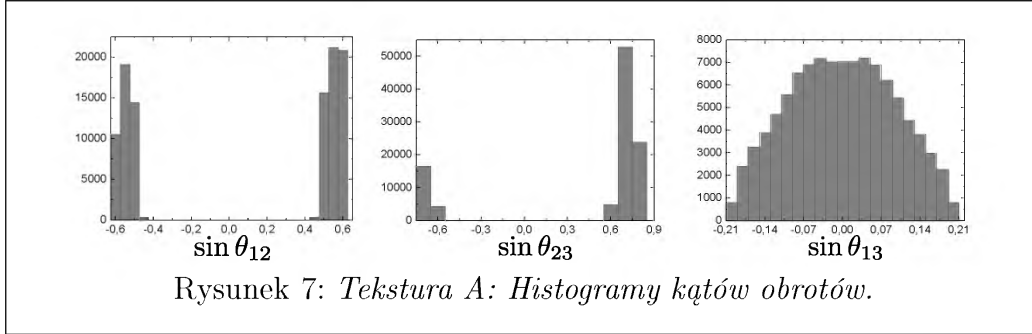
dla hierarchii normalnej poprzez wymianę neutrin Majorany. Ewentualne jego wykrycie przy tym schemacie masowym, tłumaczone musiałoby być innym mechanizmem. Jednocześnie należy mieć na uwadze, że wartość  $\langle m_{ee} \rangle = 0$  nie musi „ad hoc” implikować dla neutrin natury Diraca. Regiony możliwych rozwiązań dla tekstury A zawarte są na rysunku 6.



Przedstawione są na nim rozwiązania dla parametru  $\alpha = 1$  oraz odpowiednio dla  $\alpha = 2$ . Zgodnie z założeniami, ilość rozwiązań przy rosnącym  $\alpha$  maleje, a dla wartości  $\alpha = 2$  drastycznie spada co oznacza że, akceptowane są rozwiązania położone bliżej wartości centralnych. Manifestuje się to zmniejszeniem dozwolonych regionów rozwiązań na wykresach.

Graniczna wartość czynnika  $\alpha$ , oznaczana dalej jako  $\alpha_0$ , przy której dla próby rzędu  $10^9$  losowań, nie ma żadnych pozytywnych rozwiązań dla tekstury A wynosi  $\alpha_0 = 3.32$ . Taka wartość oznacza, że ewentualne przyszłe, większe ograniczenie błędów eksperymentalnych na moduły macierzy mieszania oraz różnice kwadratów mas, nie zaowocuje eliminacją tej tekstury. Aby tekstura ta nie była w przyszłości realizowana, zakładając niezmiennione wartości centralne, przyszłe oszacowania błędów musiałyby zmniejszyć się do poziomu  $\sim 0.9\sigma$ .

Dystrybucje kątów mieszania  $\theta_{ij}$  dla tekstury A pokazane są na rysunku 7. Z histogramu dla  $\sin \theta_{13}$  można wyczytać, że przy starych parametrach oscylacyjnych, do zrealizowania tej tekstury, preferowany był kąt  $\theta_{13}$  bliski zeru, ale jednocześnie nie jest wykluczona inna jego wartość. Bezneutrinowy rozpad beta jest niezależny od kąta  $\theta_{23}$  [71, 96] (w parametrze (64) kąt ten nie wy-



stępuje). Znajduje to odzwierciedlenie w histogramach tego kąta dla tekstur z elementem  $a \neq 0$ , są one identyczne jak dla tekstury A. Histogramy, jak i wykresy z dozwolonymi regionami dla pozostałych tekstur z jednym elementem zerowym dostępne są na stronie internetowej [94].

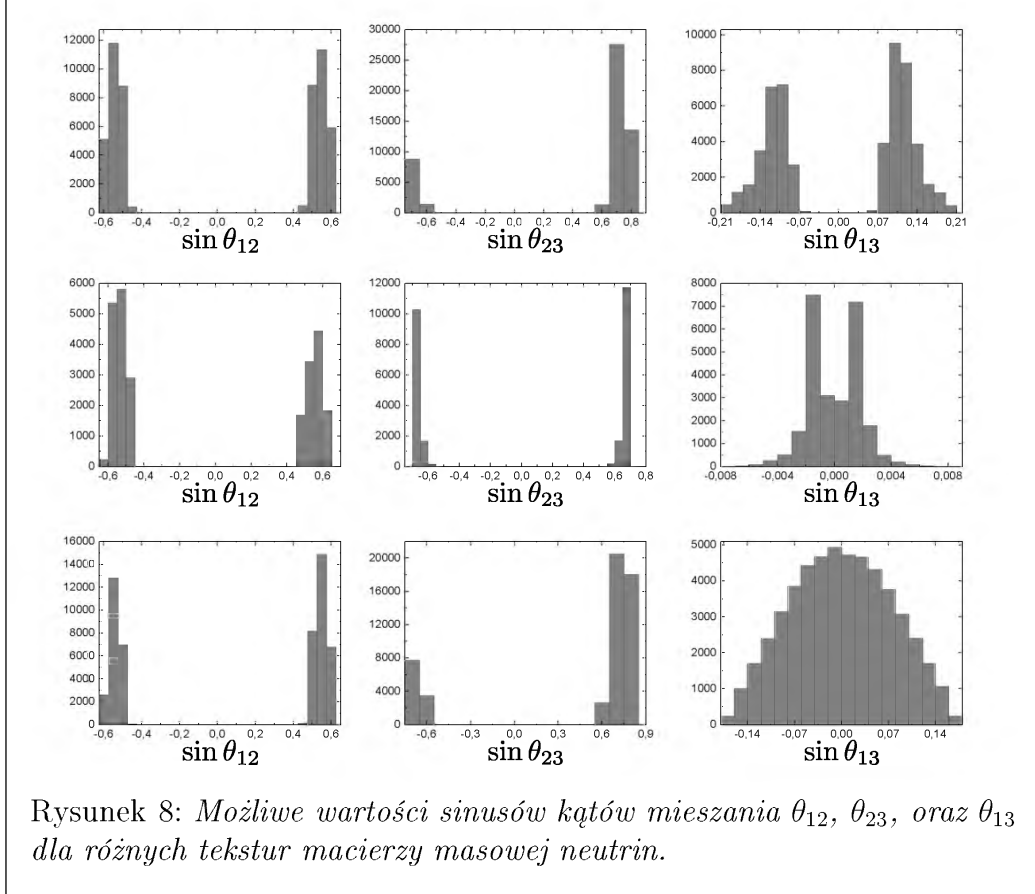
Z przebadanych wszystkich 15 możliwych tekstur zerowych II-go typu, czyli tych mających dwa niezależne zerowe parametry, procedura AMC potwierdziła, dla starych danych oscylacyjnych, realizację dokładnie tych samych siedmiu tekstur, które przewidziano analitycznie w pracy [70]. Dla hierarchii normalnej realizowane są tekstury A1 oraz A2. Tekstury od B1 do B4 realizowane są zarówno dla założonej hierarchii normalnej jak i odwrotnej. Tekstura C możliwa jest tylko przy założonej hierarchii odwrotnej. Tutaj, podobnie jak dla tekstur z jednym niezależnym parametrem równym zero, za kryterium wykluczenia istnienia realizacji tekstury przyjęto, iż odrzuca się wzorzec, jeśli  $10^9$  losowań nie daje żadnego pozytywnego wyniku.

TEKSTURA	PARAMETRY ZEROWE	HIERARCHIA	$\alpha_0$
$A_1$	$a, b = 0$	NORMALNA	2.65
$A_2$	$a, c = 0$		
$B_1$	$c, d = 0$	OBIE	1.18
$B_2$	$b, f = 0$		
$B_3$	$b, d = 0$	OBIE	1.25
$B_4$	$c, f = 0$		
$C$	$d, f = 0$	ODWROTNA	2.65

Tabela 7: *Dozwolone tekstury z dwoma zerami.*

Ostatnia kolumna Tabeli 7 zawiera graniczną wartość parametru  $\alpha_0$ , powyżej której nie ma już pozytywnych rozwiązań, a więc takich gdy losowana macierz masowa daje parametry oscylacyjne zgodne z eksperymentem. Tekstury

realizujące się tylko przy jednym założonym schemacie masowym, czyli A1, A2 i C mają wartość tego parametru wyższą niż tekstury typu B. Oznacza to, że w pierwszym etapie losowania procedury AMC, tekstury te, dają wyniki zgodne w znacznie bardziej restrykcyjnym przedziale  $x_i^{cent} \pm \sigma_i$  niż tekstury typu B.



Poprzez kąty mieszania  $\theta_{ij}$ , wyniki dla tekstur z dwoma zerami zobrazowane są na histogramach zawartych na Rysunku 8. Widać wyraźnie, że dla tekstur A1 oraz A2 preferowany jest kąt  $\theta_{13}$  różny od zera. Tekstury B1 do B4 dopuszczają wartość tego kąta równą zero, ale najwięcej przypadków mamy dla wartości tego kąta minimalnie różnych od zera. Z kolei histogram kąta  $\theta_{13}$  dla tekstury C przypomina rozkład normalny, z wartością centralną bliską zeru. Konkluzje te znajdują potwierdzenie w modułach elementów macierzy mieszania które w procedurze AMC miały najmniejszą wartość  $\chi^2$  (Tabela 8). Wyraźnie widać, że największe względne odejście od startowych wartości centralnych dotyczy wartości  $|U_{e3}| = |\sin \theta_{13} e^{-i\delta}|$ . Dla tekstur typu A wartość tego modułu wzrosła, podczas gdy dla pozostałych zmalała.



$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$A_1, A_2$	$B_1 - B_4$	$C$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$8.3 \cdot 10^{-5}$	$8.27 \cdot 10^{-5}$	$8.35 \cdot 10^{-5}$	$8.30 \cdot 10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.835	0.84	0.84	0.84
4	$ U_{e2} $	0.54	0.54	0.54	0.54
5	$ U_{e3} $	0.1	0.12	$1.9 \cdot 10^{-3}$	0.06
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.41	0.40	0.36
7	$ U_{\mu 2} $	0.575	0.56	0.63	0.58
8	$ U_{\mu 3} $	0.7	0.72	0.66	0.72
9	$ U_{\tau 1} $	0.365	0.36	0.36	0.41
10	$ U_{\tau 2} $	0.59	0.63	0.55	0.59
11	$ U_{\tau 3} $	0.685	0.68	0.75	0.68

Tabela 8: Zmiana startowej wartości  $x_i^{cent}$  w wyniku działania procedury AMC.

Omawiana procedura AMC nie daje pozytywnych wyników dla tekstur z ilością niezależnych zerowych parametrów macierzy masowej neutrin większych lub równych od trzech. Eliminuje to bezwzględnie wszystkie modele zakładające zera na diagonalnej w macierzy masowej neutrin.

### 3.2.3 Analiza obecnych danych doświadczalnych

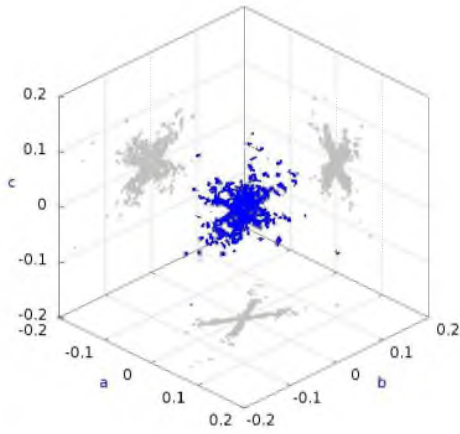
Dla porównania, obecne wyniki będziemy omawiać w takiej samej kolejności jak w poprzednim podrozdziale. Zamieszczone rezultaty dla bieżących danych oscylacyjnych neutrin są nowe i nie były dotąd publikowane. Analizy dokonujemy przy danych doświadczalnych wziętych z pracy [30]. Nowsza praca tych samych Autorów [97] nie zmienia w żaden sposób wyników. Tabela 9 podsumowuje parametry oscylacyjne dla na modułów elementów macierzy mieszania wraz z błędami na poziomie  $3\sigma$ . Zamieszczone są w niej również, przy tym samym poziomie błędów, oszacowania różnic kwadratów mas neutrin. Obszary rozwiązań ogólnych (Rys. 9 na stronie 39), dopuszczających wszystkie elementy macierzy masowej neutrin różne od zera, różnią się nieznacznie od analogicznych prezentowanych w podrozdziale 3.2.2 (porównaj z Rys. 3 na stronie 32), zarówno dla schematu normalnego jak i odwrotnego. Wzajemne odstępstwa są większe bliżej granic uzyskanych regionów rozwiązań. Kształty dla bieżących danych wydają się być mniej regularne.

Analogia ta znajduje również potwierdzenie w histogramach. Aktualne histogramy dla obu schematów masowych umieszczone są na Rysunkach: 10 na

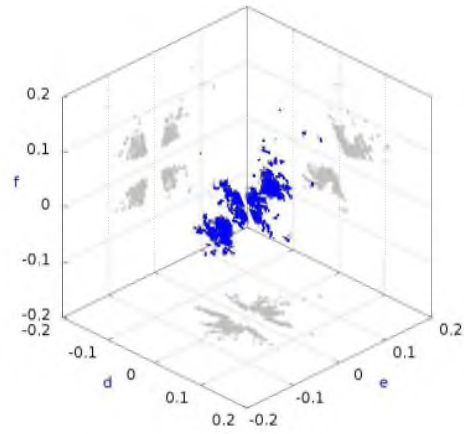
$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$\sigma_i$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$7.54 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.822	0.04
4	$ U_{e2} $	0.54	0.05
5	$ U_{e3} $	0.155	0.15
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.135
7	$ U_{\mu 2} $	0.704	0.13
8	$ U_{\mu 3} $	0.614	0.11
9	$ U_{\tau 1} $	0.443	0.172
10	$ U_{\tau 2} $	0.452	0.15
11	$ U_{\tau 3} $	0.774	0.113

Tabela 9: *Dozwolone wartości centralne i błędy na poziomie  $3\sigma$  modułów macierzy mieszania  $|U_{ij}|$  oraz różnic kwadratów mas  $\Delta m_{32}^2$ ,  $\Delta m_{21}^2$  obliczone na podstawie pracy [30].*

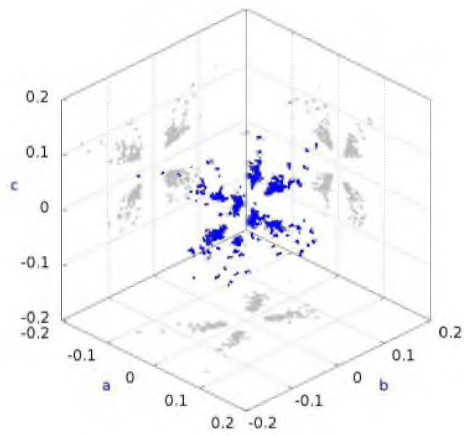
stronie 40 dla hierarchii normalnej i 11 na stronie 40 dla hierarchii odwrotnej. Dla hierarchii normalnej zarówno dla starszych jak i nowych danych, różne od zera parametry macierzy masowej neutrin to **e** oraz **f** (porównaj Rysunek 4, na stronie 33 z Rysunkiem 10 na stronie 40), natomiast dla hierarchii odwrotnej to: **a**, **b** oraz **c** (porównaj Rysunek 5 na stronie 33 z Rysunkiem 11 na stronie 40).



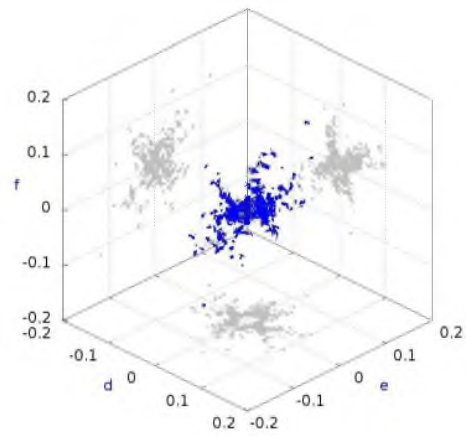
(a)



(b)

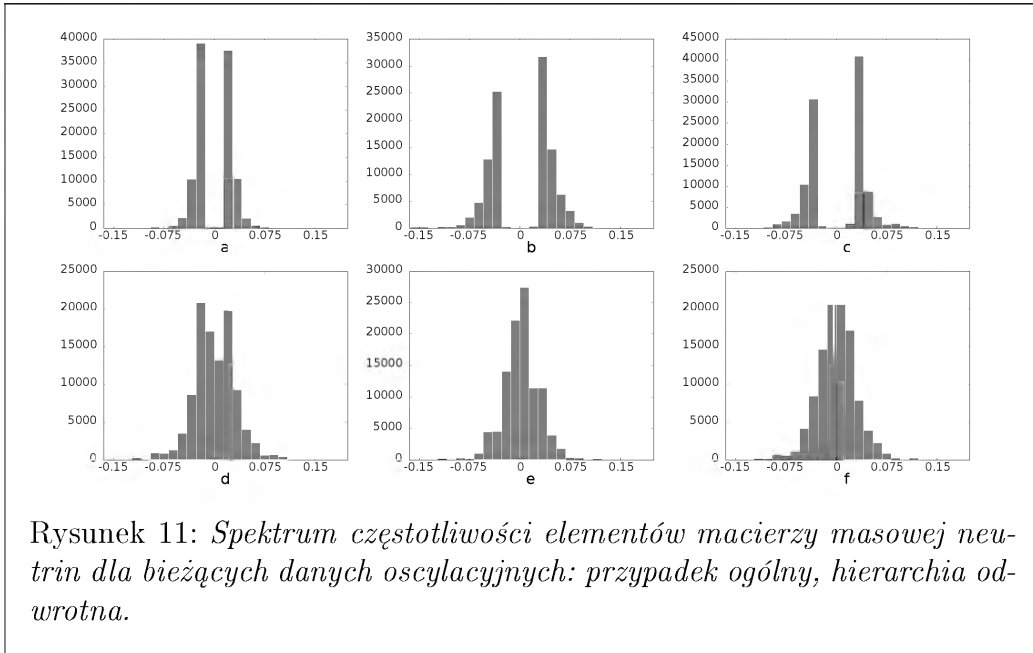
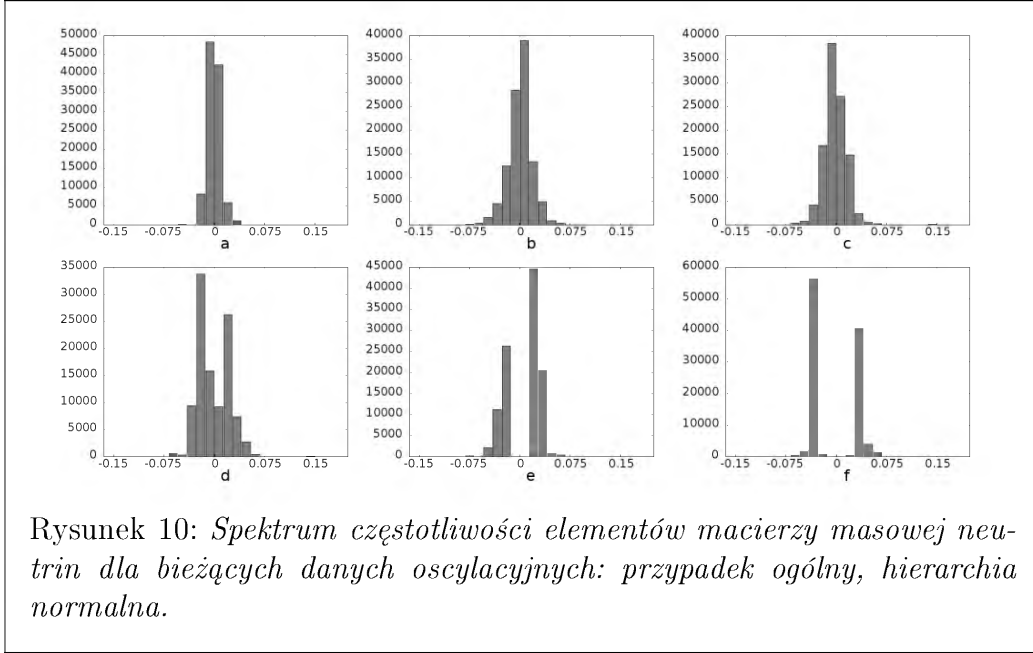


(c)



(d)

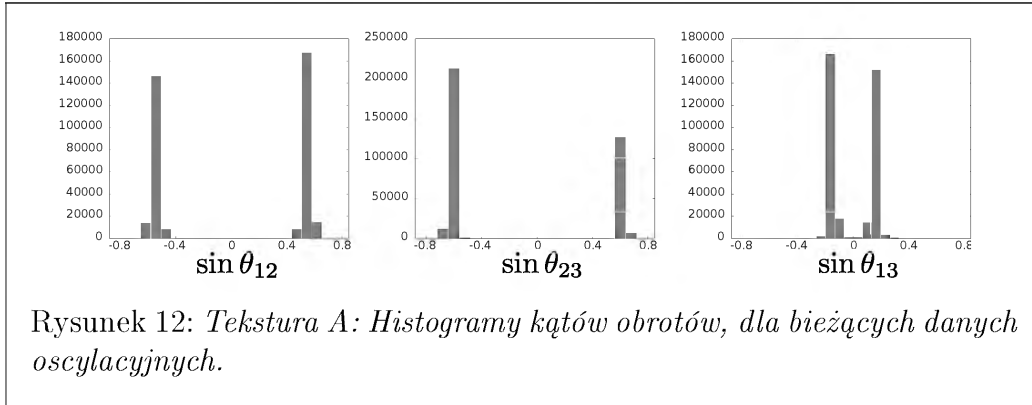
Rysunek 9: Dozwolone regiony parametrów macierzy masowej neutrin, pozostających w zgodzie z aktualnymi danymi eksperymentalnymi na poziomie  $3\sigma$ . Rysunki (a) i (b) dla hierarchii normalnej. Odpowiednio Rysunki (c) i (d) dla hierarchii odwrotnej.



Wniosek stwierdzający brak istnienia tekstury z jednym niezależnym parametrem  $a = 0$  dla hierarchii odwrotnej, przy nowych danych, utrzymany jest w mocy. Pozostałe tekstury z jednym zerem są w dalszym ciągu możliwe.

Podobnie jak dla starszych danych, ze względu na bezpośrednią korelację z bezneutrinowym rozpadem beta warto spośród tekstur z jednym zerem, wyróżnić teksturę A - z elementem  $a = 0$ . Podobnie jak dla nieaktualnych już parametrów oscylacyjnych, tekstura ta realizowana jest tylko i wyłącznie dla hierarchii normalnej. Utrzymany jest w mocy wniosek o nierealizowaniu bezneutrinowego rozpadu beta dla hierarchii normalnej. W wynikach opartych na starszych, nieaktualnych już danych wartość parametru  $\alpha_0$  dla tej tekstury wynosiła 3.32. Dla aktualnych danych eksperymentalnych  $\alpha_0$  zmalało do 2.23.

Informacja o kątach mieszania dla tej tekstury odczytana z histogramów (Rysunek 12) wyraźnie wskazuje różny od zera kąt  $\theta_{13}$ . Rozpatrując ten kąt, można stwierdzić, że odróżnia to istotnie uzyskane dane, od tych uzyskanych przy obowiązywaniu starych danych oscylacyjnych (patrz Rysunek 7 na stronie 35). Dla dwóch pozostałych kątów histogramy dla starszych i aktualnych danych eksperymentalnych są porównywalne. Najczęściej występująca wartość kąta  $\theta_{13}$  zbliżona jest do wartości obecnie mierzonej. Efektu tego można było się spodziewać.



Rysunek 12: Tekstura A: Histogramy kątów obrotów, dla bieżących danych oscylacyjnych.

Sytuacja dla tekstur zerowych II-go typu - mających dwa niezależne parametry zerowe - jest różna dla nowych danych oscylacyjnych. Po ponownym przebadaniu wszystkich możliwych kombinacji okazuje się, że spośród poprzednio możliwych 7 tekstur z dwoma zerami aktualne pozostaje jedynie 5. Z listy możliwych realizacji definitywnie odrzucone są tekstury B2 i B4. Dodatkowo okazuje się, że poprzednio dopuszczana realizacja tekstury B1 oraz B3 przy odwrotnym schemacie masowym nie ma obecnie miejsca. Pełna lista realizowanych tekstur z dwoma zerami zaprezentowana jest w Tabeli 10. Faworyzowana jest realizacja schematu z normalną hierarchią mas. Jedynie

TEKSTURA	PARAMETRY ZEROWE	HIERARCHIA	$\alpha_0$
$A_1$	$a, b = 0$	NORMALNA	3.54
$A_2$	$a, c = 0$	NORMALNA	2.89
$B_1$	$c, d = 0$	NORMALNA	1.08
$B_3$	$b, d = 0$	NORMALNA	1.12
$C$	$d, f = 0$	ODWROTNA	1.41

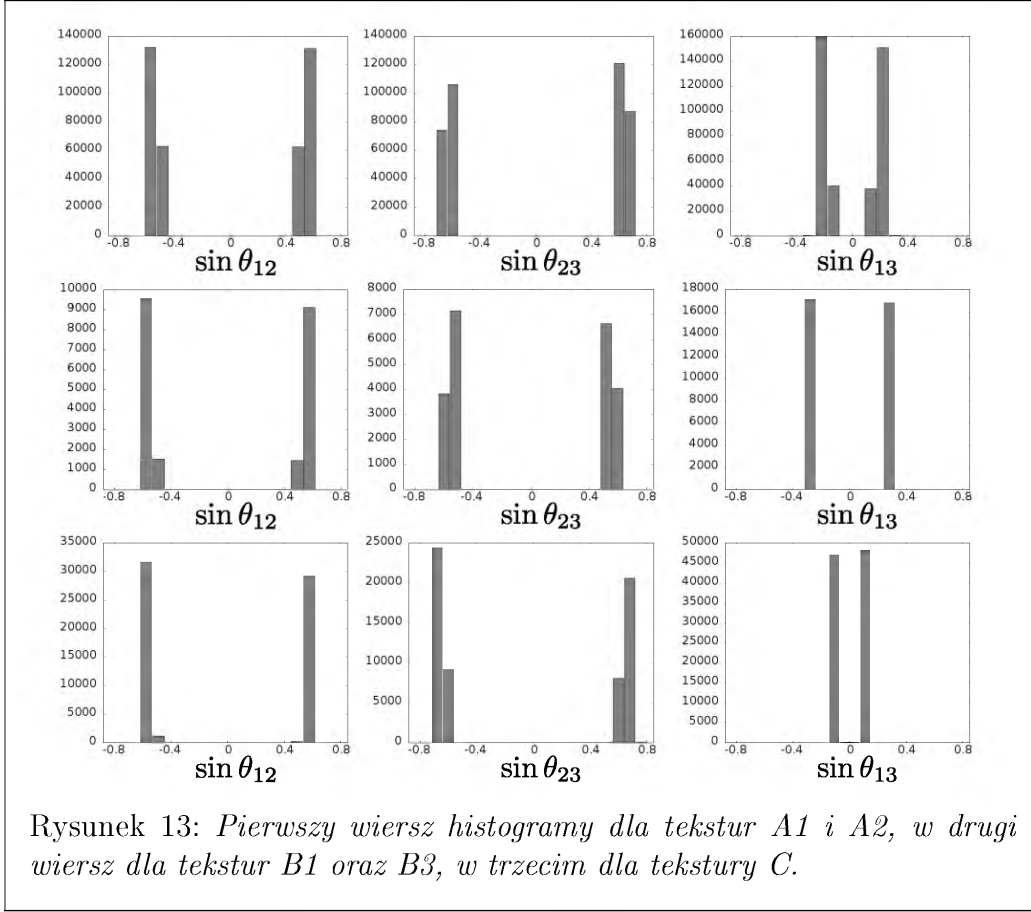
Tabela 10: *Dozwolone tekstury z dwoma zerami.*

tekstura C, tak jak przy poprzednich danych, ciągle możliwa jest przy odwrotnej hierarchii mas (patrz Tabela 7 na stronie 35).

Tekstura A1 oraz tekstura A2 charakteryzują się wyższymi od pozostałych wartościami parametru  $\alpha_0$  (ostatnia kolumna w Tabeli 10). Jednocześnie wartości te są wyższe niż analogiczne uzyskane dla tych tekstur przy nieobowiązujących już danych oscylacyjnych. Pozostałe tekstury mają wartości tego parametru mniejsze od szacowanych dla starszych danych oscylacyjnych. Dla tekstury B1 aktualnie szacowana wartość  $\alpha_0$  jest najniższa, bliska jedności. Może to wskazywać, że w przyszłości, przy dokładniejszych danych oscylacyjnych, tekstura ta będzie wykluczona. Dla tekstury B3,  $\alpha_0$  wynosi dla obecnych danych 1.12. Dla nieaktualnych danych wartość ta wynosiła 1.25. Dla tekstury C  $\alpha_0$  zmalało od wartości 2.65, wyznaczonej dla starych danych oscylacyjnych, do wartości 1.41, szacowanej dla nowych danych eksperymentalnych.

Dystrybucje uzyskanych kątów mieszania dla tekstur z dwoma zerami zamieszczone są na Rysunku 13 (na stronie 43). Tabela 11 (na stronie 43) zawiera informację o wartościach modułów macierzy mieszania oraz różnicach kwadratów mas przy najmniejszej wartości  $\chi^2$  uzyskanej metodą AMC w konfrontacji z wartościami początkowymi.

Istotną informacją jest to, że nie uzyskano żadnych innych rozwiązań. Katalog możliwych realizacji tekstur II-go typu jest tylko i wyłącznie zawężony. Podobnie nie ma żadnych możliwych rozwiązań dla ilości niezależnych zer macierzy masowej równej lub większej od trzech.



$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$A_1, A_2$	$B_1 - B_4$	$C$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$7.54 \cdot 10^{-5}$	$8.27 \cdot 10^{-5}$	$8.35 \cdot 10^{-5}$	$8.30 \cdot 10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.822	0.828	0.821	0.827
4	$ U_{e2} $	0.54	0.527	0.496	0.557
5	$ U_{e3} $	0.155	0.186	0.277	0.068
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.31	0.318	0.462
7	$ U_{\mu 2} $	0.704	0.713	0.805	0.607
8	$ U_{\mu 3} $	0.614	0.626	0.498	0.645
9	$ U_{\tau 1} $	0.443	0.464	0.472	0.318
10	$ U_{\tau 2} $	0.452	0.460	0.321	0.565
11	$ U_{\tau 3} $	0.774	0.756	0.820	0.760

Tabela 11: Zmiana wartości centralnej  $x_i^{cent}$  w wyniku działania procedury AMC.

### 3.3 Fenomenologiczna rekonstrukcja macierzy masowej leptonów w funkcji masy najlżejszego neutrina

Rekonstrukcja macierzy masowej neutrin w funkcji najlżejszego neutrina jest przykładem metody „bottom-up”. Jest to metoda która zakłada symetryczną, zespoloną macierz masową w postaci:

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} M_{11}e^{i\phi_1} & M_{12}e^{i\phi_2} & M_{13}e^{i\phi_3} \\ M_{12}e^{i\phi_2} & M_{22}e^{i\phi_4} & M_{23}e^{i\phi_5} \\ M_{13}e^{i\phi_3} & M_{12}e^{i\phi_2} & M_{33}e^{i\phi_6} \end{pmatrix}, \quad (104)$$

która jawnie zależy od 6-ciu modułów oraz 6-ciu faz.

Korzystając z odwrotnej, w sensie macierzowym, relacji do równania (48) (strona 12):

$$\mathcal{M}_\nu = U^\dagger m_{diag} U^{-1}, \quad (105)$$

można wyrazić wszystkie elementy: zarówno moduły jak i fazy, macierzy (104) jako funkcję:

$$(\mathcal{M}_\nu)_{ik} = f_{ik}(\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, m_1, m_2, m_3, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3). \quad (106)$$

Dostaje się w ten sposób odpowiedniość pomiędzy wszystkimi 12 elementami macierzy mieszania i macierzy masowej.

Funkcja  $f_{ik}$  bezpośrednio zależy zarówno od fazy Diraca  $\delta$  jak i faz Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$  oraz trzech faz niefizycznych  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Faza Diraca i fazy Majorany są mierzalne. Z eksperymentów oscylacyjnych posiadamy już pewne informacje o fazie  $\delta$ , oszacowania na jej wartość podane zostały w Tabeli (2) na stronie 16. Brak jest jednak jakichkolwiek informacji doświadczalnych o fazach Majorany.

Metoda omawia w tej części bazować będzie na wyborze, przy odpowiednio dużej statystyce, minimalnej i maksymalnej wartości funkcji  $f_{ik}$ . Z założenia, prezentowana w tym podrozdziale metoda, jest szersza niż metoda „top-down” prezentowana wcześniej, ponieważ jest bogatsza o dyskusję wszystkich faz.

Jej celem jest uzyskanie zależności każdego modułu oraz powiązanej z nią fazy, macierzy (104) w funkcji najlżejszej masy neutrina.

Aby uzyskać informację o zachowaniu funkcji  $f_{ik}$  postępowano w następujący sposób:

- (a) Dla ustalonej hierarchii, masy cięższych neutrin, wyrażamy przez masę najlżejszego. Dla hierarchii normalnej, najmniejsza masa to  $m_1$ , zatem:

$$m_2 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{21}^2}, \quad (107)$$



$$m_3 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{31}^2} . \quad (108)$$

Natomiast dla odwrotnej najmniejsza z mas to  $m_3$ , zatem:

$$m_2 = \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{31}^2 + \Delta m_{21}^2} , \quad (109)$$

$$m_1 = \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{31}^2} . \quad (110)$$

- (b) Ustalając masę najmniejszego neutrina, pozostałe parametry losujemy, każdy w zakresie wartości dozwolonych błędami doświadczalnymi.
- (c) Przy odpowiednio dużej próbie losowej wybieramy wartość najmniejszą oraz największą funkcji  $f_{ik}$ , a więc możliwy zakres modułów i faz w macierzy masowej neutrin.

Tak dobra metodologia pozwala uzyskać nie tylko wykresy, z których można odczytać regiony utożsamiane z zerami macierzy masowej, ale również badać wpływ poszczególnych faz na przebieg zależności  $f_{ik}$ . Koncepcja ta zaproponowana została w pracy [51].

W pracy przyjęto, że przedział masy najlżejszego neutrina zawiera się w zakresie  $m \sim 0.0001 - 1$  eV. Przyjmuje się wartość funkcji  $f_{ik}$  za zero gdy spełniony jest warunek  $f_{ik} < 10^{-6}$ .

Ustalając, że parametry oscylacyjne:  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ , a także różnice kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ , losowane są w zakresie swoich błędów na poziomie  $1\sigma$ , wszystkie elementy macierzy masowej przeanalizowane zostały przy trzech różnych kombinacjach parametrów wejściowych:

- (a) Faza Diraca  $\delta$ , zmieniająca się w zakresie od  $0 - 2\pi$ .  
Fazy Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$ , ustalone, równe zero.  
Obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji przy tak dobranych parametrach jest zakreskowany na niebiesko.
- (b) Faza Diraca  $\delta$ , zmienia się w zakresie  $0 - 2\pi$ .  
Fazy Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$ , ustalone równe  $\pi/4$ .  
Obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji przy tak dobranych parametrach jest zakreskowany na czerwono.
- (c) Faza Diraca  $\delta$  oraz fazy Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$ , zmieniająca się w zakresie od  $0 - 2\pi$ .  
Obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji przy tak dobranych parametrach jest zaciemniony na szaro.

Dodatkowo przeanalizowany był czwarty zestaw danych analogiczny do omawianego w punkcie (c) ale przy założeniu, że parametry oscylacyjne:  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ , a także różnice kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ , losowane są w zakresie swoich błędów na poziomie  $3\sigma$ . Odpowiadający tej konfiguracji parametrów obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji jest równy obszarowi szaremu przedłużonemu o obszar zakreskowany na szaro.

Uzyskane wykresy zebrane są na Rysunkach od 14 do 19.

Jednoznacznie można stwierdzić, że na poziomie  $1\sigma$  zabronione są dwie tekstury zerowe. Dla parametru  $\mathcal{M}_{11}$  (Rysunek 14, obszar jednolicie szary) przy hierarchii odwrotnej oraz dla parametru  $\mathcal{M}_{33}$  (Rysunek 19, obszar jednolicie szary) dla hierarchii normalnej. Parametry te w języku metody „top-down” to **a** oraz **f**.

Na poziomie  $3\sigma$  zabroniona jest już tylko jedna tekstura, związana z elementem  $\mathcal{M}_{11}$ , przy hierarchii odwrotnej. Dla elementu  $\mathcal{M}_{33}$  zwiększenie poziomu ufności błędów skutkuje obniżeniem minimów funkcji  $f$  do wartości które zgodnie z kryterium przyjmuje się jako zero. Uwidocznione jest to na rysunku 19 jako przedłużenie jednolicie szarego obszaru o obszar zakreskowany tym kolorem.

Kolorem niebieskim zakreskowany jest wpływ fazy Diraca dla każdego z elementów. Nie należy naiwnie odczytywać tego obszaru tak jakby rozgraniczał on cząstki Diraca od Majorany. Dla cząstek Majorany faza  $\delta$  może być też różna od zera. Jest to ilustracja wkładu tej fazy w cały moduł elementu macierzowego.

Moduły te mogą w ogólności zmieniać się w całym zakresie szarego pola dla błędów na poziomie  $1\sigma$ . Dla błędów na poziomie  $3\sigma$  przebieg minimów funkcji  $f$  rozszerzony jest o obszar zakreskowany na szaro. Maksima tej funkcji nie są istotne dla obecnych rozważań dlatego nie są one uwidocznione na rysunkach.

Przy rozpatrywaniu modułów  $|\mathcal{M}_{ik}|$  fazy niefizyczne nie mają znaczenia. Wynika to z faktu, że elementy  $(\mathcal{M}_{ik})$  zależą od tych faz w sposób:

$$(\mathcal{M}_{ik}) \sim e^{-i\beta_i} e^{-i\beta_k} (\mathcal{M}_{ik})' , \quad (111)$$

gdzie ze wzorów (32) oraz (50) mamy:

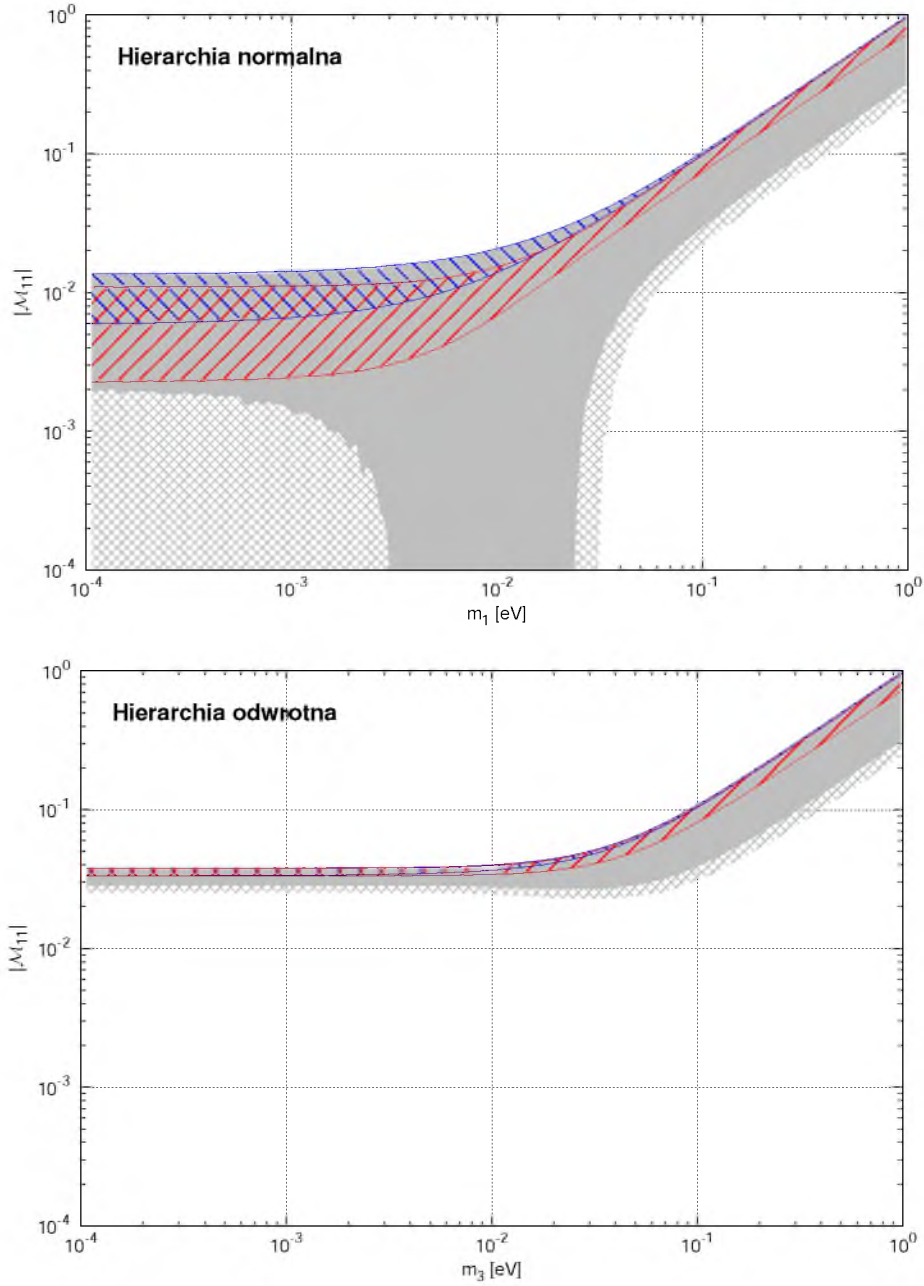
$$(\mathcal{M}_{ik})' = \left( U_D^* f_M^* M_{diag} f_M^* U_D^\dagger \right)_{ik} , \quad (112)$$

zatem moduły macierzy masowej są od tych faz niezależne. Istotnym wnioskiem płynącym z analizy uzyskanych wyników jest to, że dla ustalonych wartości faz Majorany moduły macierzy masowej nie muszą, mimo zmienności reszty parametrów od których zależy funkcja  $f$  dążyć do zera. Na rysunkach

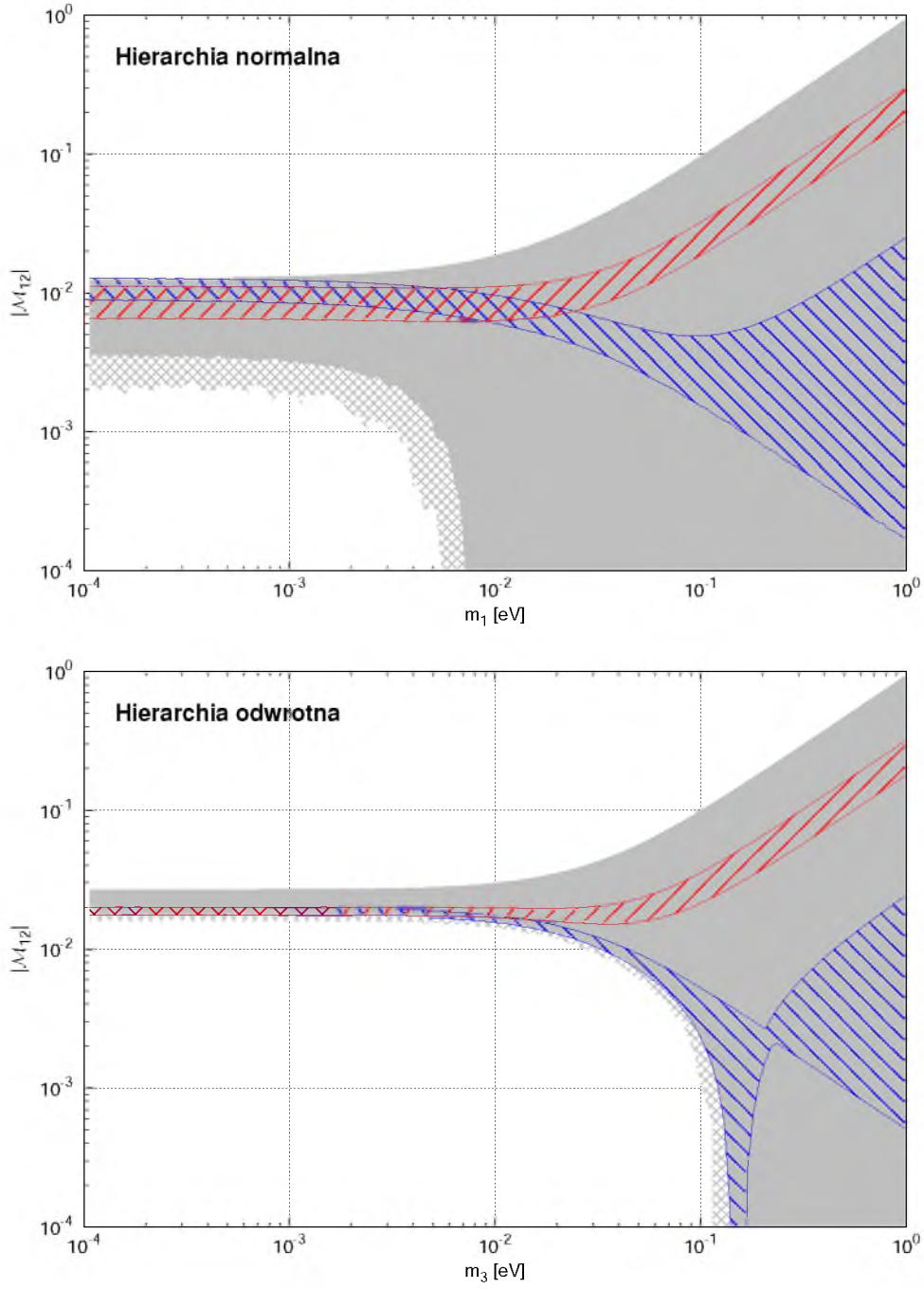
reprezentowane jest to przez obszary zakreskowane na czerwono. Innymi słowy, natura Majorany neutrin nie jest warunkiem wystarczającym istnienia tekstur zerowych. Tylko w pewnym zakresie faz Majorany moduły elementów macierzowych mogą być równe zero.

Istnieje wiele prac [71, 98] w których autorzy kreślą zależności modułów macierzy masowej od najlżejszego neutrina, w tych analizach fazy łamania symetrii CP nie są brane pod uwagę. Wpływ faz Majorany i udział faz Diraca w tych zależnościach, są tu prezentowane po raz pierwszy.

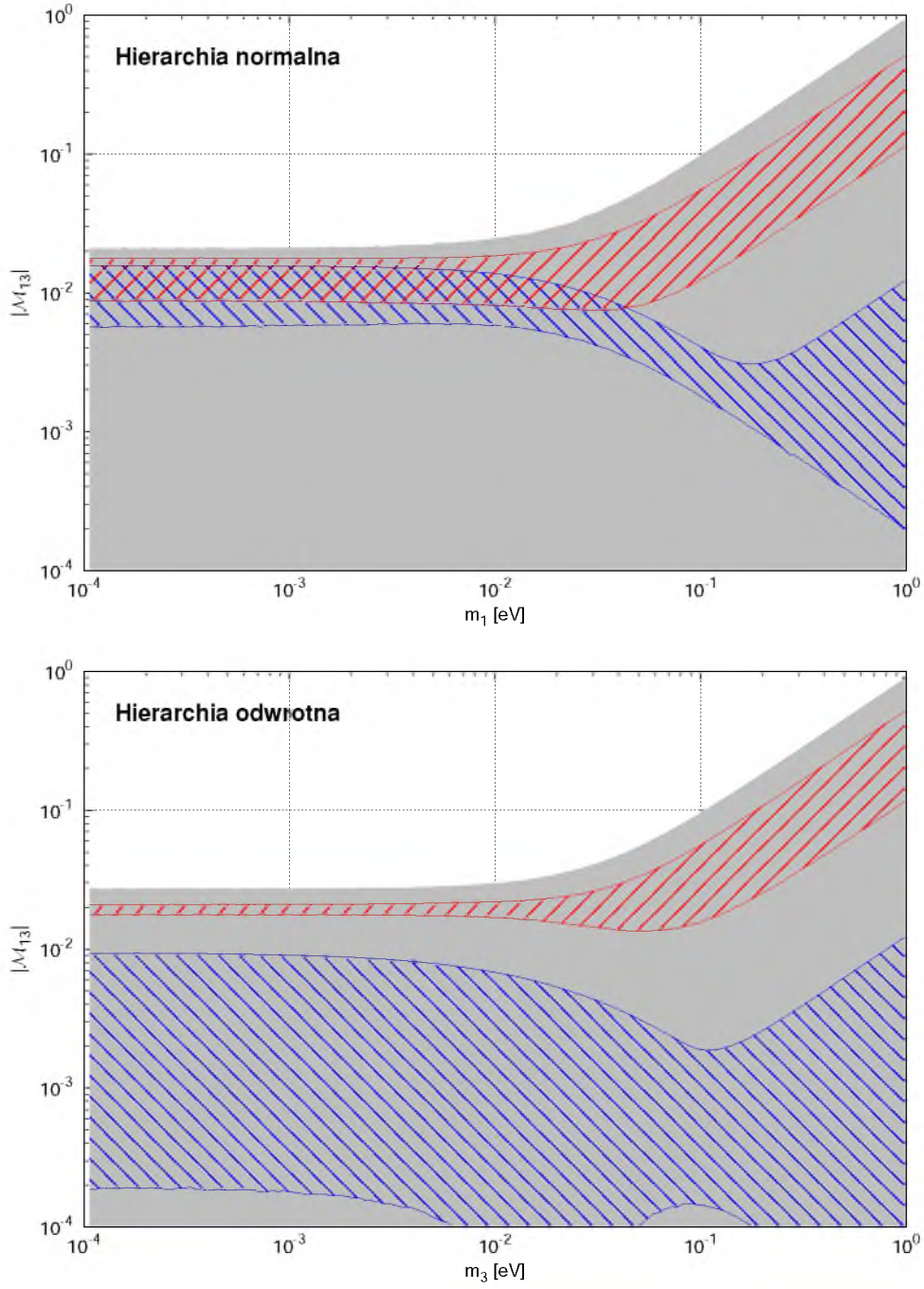
Fazy elementów macierzy masowej neutrin  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  (104) nie podlegają pomiarowi, a więc nie są przedmiotem analizy.



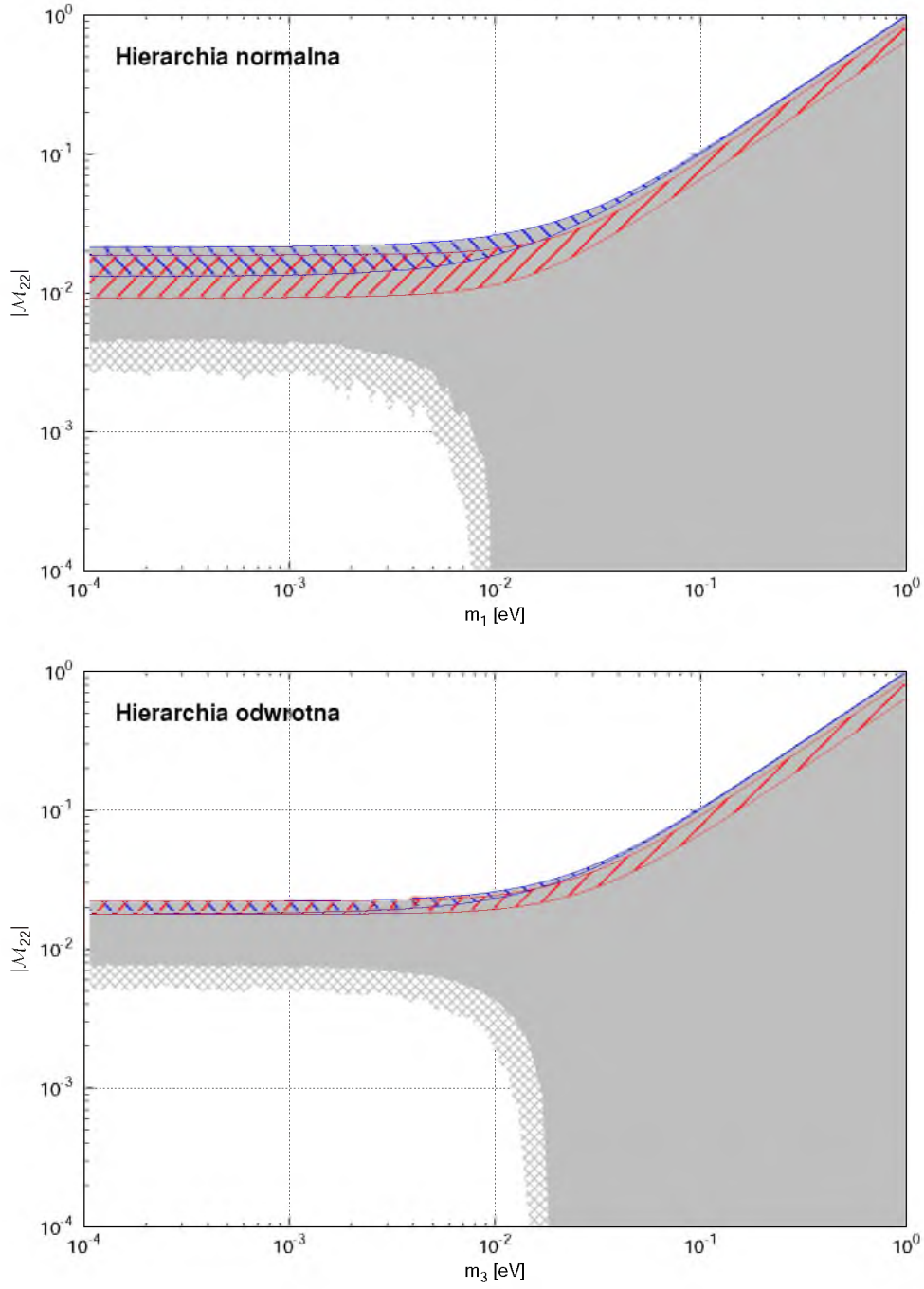
Rysunek 14: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{11}|$  od masy najbliższego neutrina. Na szaro zaznaczony obszar w którym faza Diraca i fazy Majorany są dowolne (obszar pełny - błędy na poziomie  $1\sigma$ , obszar pełny plus kreskowany - błędy na poziomie  $3\sigma$ ). Na niebiesko zaznaczony jest obszar w którym fazy Majorany wynoszą zero. Na czerwono zaznaczony jest obszar w którym faza Diraca jest dowolna a fazy Majorany ustalone ( $\pi/4$ ).



Rysunek 15: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{12}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).

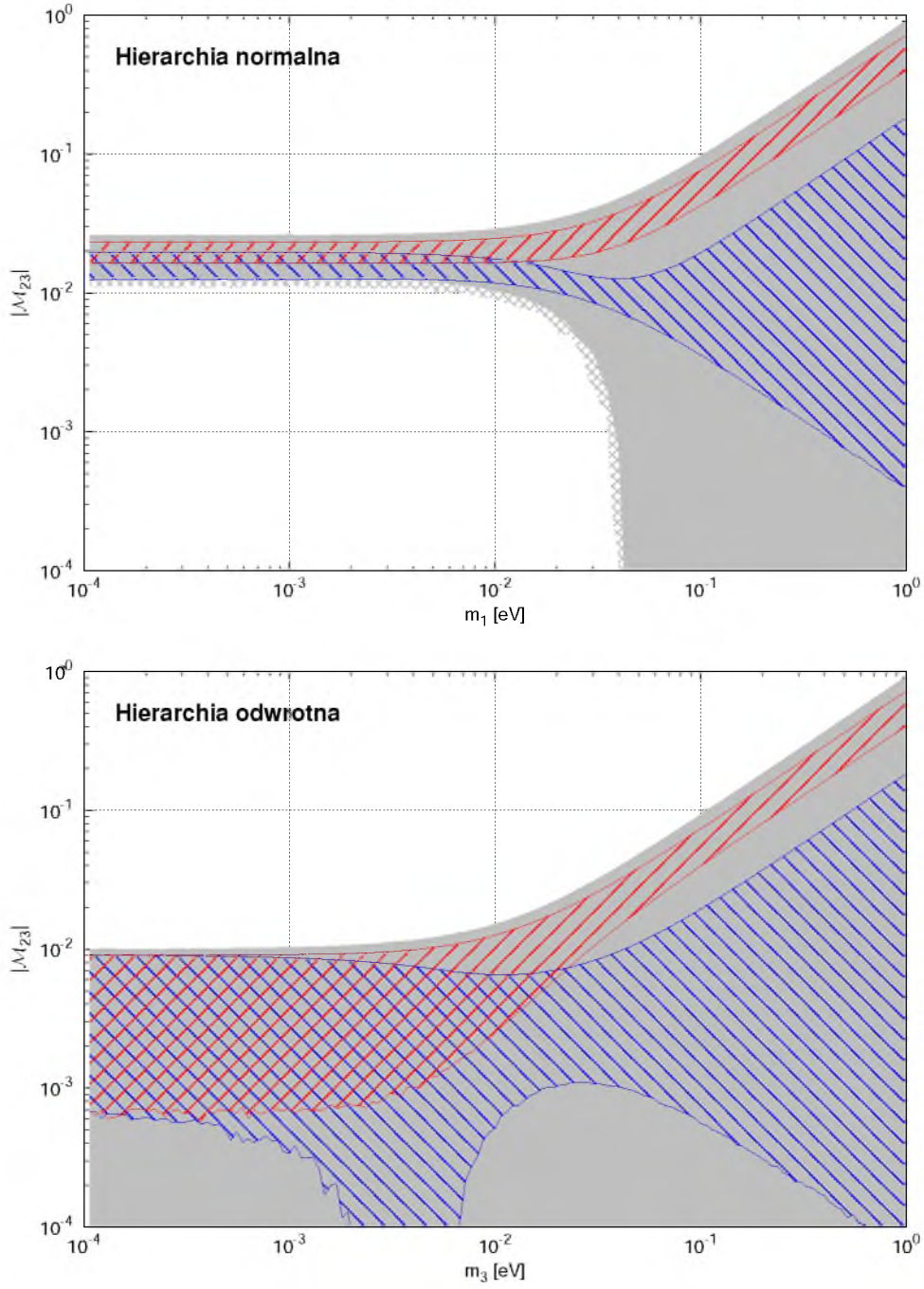


Rysunek 16: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{13}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).



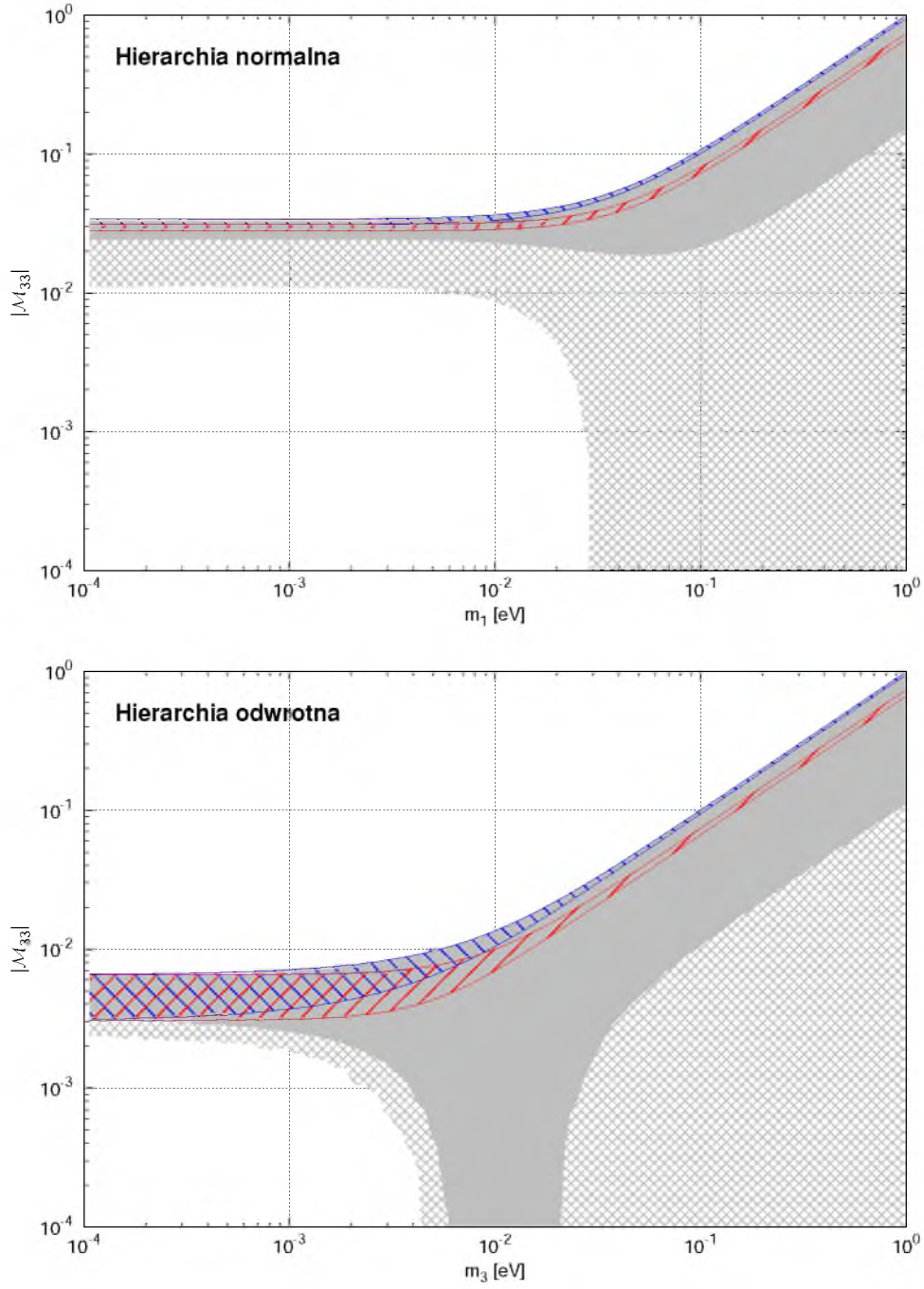
Rysunek 17: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{22}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).





Rysunek 18: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{23}|$  od masy najlżejszego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).





Rysunek 19: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{33}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).

## 4 Nieabelowe dyskretne grupy symetrii macierzy masowej leptonów

W poprzednim rozdziale rozpatrywane były pewne własności macierzy masowej neutrin, polegające na przyjęciu założenia o zerowaniu się jej elementów. Zawsze taką własność macierzy masowych można wyjaśnić istnieniem pewnych skończonych symetrii abelowych.

Inna próba wyjaśnienia mieszania PMNS polega na przyjęciu relacji pomiędzy elementami macierzy masowej  $\mathcal{M}_\nu$ , wynikających z istnienia symetrii nieabelowej. Próbujemy znaleźć taką transformację pomiędzy rodzinami neutrin i leptonów naładowanych, które dadzą zgodne z eksperymentem, relacje pomiędzy elementami macierzy masowej.

Prezentowana w tym rozdziale dyskusja ma charakter opisowy [99, 100], nie dysponujemy na razie własnymi wynikami numerycznymi.

### 4.1 Symetrie nieabelowe w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach

W Modelu Standardowym opartym o symetrię cechowania opisaną grupą  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  chiralne lewe stany cząstek transformują się względem reprezentacji dwuwymiarowej, tworząc dublety:

$$Q_{\alpha L} = \begin{pmatrix} u_{\alpha L} \\ d_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad L_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha L} \\ l_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad (113)$$

natomiast stany prawe są singletami grupy cechowania:

$$u_{\alpha R}, d_{\alpha R}, \nu_{\alpha R}, l_{\alpha R}. \quad (114)$$

Lagranżjan Yukawy w poszerzonym MS, w którym neutrina posiadają masę ma postać:

$$L_Y = - \sum_{\alpha, \beta} \left( h_{\alpha, \beta}^u [\bar{Q}_{\alpha L} \Phi u_{\beta R}] + h_{\alpha, \beta}^d [\bar{Q}_{\alpha L} \tilde{\Phi} d_{\beta R}] + h_{\alpha, \beta}^l [\bar{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi} l_{\beta R}] + h_{\alpha, \beta}^\nu [\bar{L}_{\alpha L} \Phi \nu_{\beta R}] \right). \quad (115)$$

gdzie,  $\Phi$  jest dubletem Higgsa:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi^- \end{pmatrix}, \text{ natomiast } \tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*, \quad (116)$$

$h_{\alpha,\beta}^u, h_{\alpha,\beta}^d, h_{\alpha,\beta}^l, h_{\alpha,\beta}^\nu$  są macierzami Yukawy.  
Po spontanicznym złamaniu symetrii:

$$\langle \tilde{\Phi} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (117)$$

otrzymujemy cztery macierze masowe dla kwarków i leptonów

$$M_{\alpha,\beta}^u = \frac{vh_{\alpha,\beta}^u}{\sqrt{2}}, \quad M_{\alpha,\beta}^d = \frac{vh_{\alpha,\beta}^d}{\sqrt{2}}, \quad M_{\alpha,\beta}^l = \frac{vh_{\alpha,\beta}^l}{\sqrt{2}}, \quad M_{\alpha,\beta}^\nu = \frac{vh_{\alpha,\beta}^\nu}{\sqrt{2}}. \quad (118)$$

dające Lagranżjan masowy postaci:

$$\begin{aligned} L_{mass} = & - \sum_{\alpha,\beta} \left( [\bar{u}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^u u_{\beta R}] + [\bar{d}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^d d_{\beta R}] \right. \\ & \left. + [\bar{l}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^l l_{\beta R}] + [\bar{\nu}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^\nu \nu_{\beta R}] \right). \end{aligned} \quad (119)$$

W ogólności macierze (118) są macierzami zespolonymi o wymiarze 3. Dla neutrin Majorany są zespolonymi macierzami symetrycznymi. Dokładna dyskusja macierzy masowej neutrin jest przedmiotem pierwszego rozdziału pracy.

Założyliśmy, że neutrina mają naturę Diraca. Dla neutrin Majorany musimy przyjąć:

$$\nu_{\beta R} = C \bar{\nu}_{\beta L}^T. \quad (120)$$

Podobnie, gdy istnieją neutrina sterylne, postać (119) dla lekkich neutrin nie ulega zmianie, natomiast:

$$M^\nu \rightarrow M_L^\nu - M_D M_R^{-1} M_D^T. \quad (121)$$

Symetrie pomiędzy elementami macierzy leptonów możemy rozważać w MS a także w jego rozszerzeniach. Wychodząc poza MS, można rozważać więcej multipletów Higgsa, na przykład:

- $N_S$  singletów:  $H_m, m = 1, 2, \dots, N_S$ ,
- $N_d$  dubletów:  $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, N_d$ , gdzie:  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_i^0 \\ \phi_i^- \end{pmatrix}$ ,
- $N_t$  trypletów:  $\Delta_n, n = 1, 2, \dots, N_t$ , gdzie:  $\Delta_n = \begin{pmatrix} \Delta_n^+ & \sqrt{2}\Delta_n^{++} \\ \Delta_n^0 & -\Delta_n^+ \end{pmatrix}$ .

Jak zobaczymy takie rozszerzenia będą konieczne. Niektóre pola Higgsa pojawiają się jako pola flawonowe. W najogólniejszej sytuacji mechanizm nadawania masy dopuszcza sprzężenie z różnymi polami Higgsa. Oznaczmy dowolne z wymienionych pól fermionowych jako:

$$\psi_\alpha = \{Q_{\alpha L} \text{ lub } u_{\alpha R}, d_{\alpha R}; L_{\alpha L} \text{ lub } l_{\alpha R}, \nu_{\alpha R}\} . \quad (122)$$

Założmy, że istnieje skończona rodzinna symetria  $\mathcal{G}$  według której transformują się zarówno pola reprezentowane przez dublety jak i pola reprezentowane przez singlety. Niech dla każdego z pól  $\psi_\alpha$  istnieją trójwymiarowe macierze reprezentacji  $P$  grupy  $\mathcal{G}$  oznaczone jako  $A_p^\psi$ , oraz odpowiednio wymiarowe macierze reprezentacji grupy  $\mathcal{G}$  dla multipletów Higgsa, oznaczone np. dla dubletów jako  $A_p^\Phi$ .

Rozpatrzmy symetrię rodzinną  $\mathcal{G}$  dla członów Yukawy na przykładzie neutrin. Symetria ta dla innych pól, realizowana jest analogicznie. W Modelu Standardowym względem zakładanej symetrii, człon Yukawy:

$$L_Y = - \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} h_{\alpha, \beta}^\nu \left[ \bar{L}_{\alpha L} \Phi \nu_{\beta R} \right] , \quad (123)$$

musi być niezmienniczy. Powyższy Lagranżjan zapisany jest dla jednego pola Higgsa. W sytuacji ogólnej przyjmuje on formę (gdy mamy na przykład  $N_d$  dubletów Higgsa):

$$L_Y = - \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \sum_{i=1}^{N_d} \bar{L}_{\alpha L} (h_i^\nu)_{\alpha, \beta} \Phi_i \nu_{\beta R} \quad (124)$$

Zakładamy, że pola w Lagranżjanach (123) i (124) transformują się w sposób:

$$L'_{\alpha L} = \sum_{\chi=e, \mu, \tau} (A_p^L)_{\alpha \chi} L_{\chi R} , \quad (125)$$

dla dubletów, dla singletów:

$$\nu'_{\beta R} = \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} (A_p^\nu)_{\beta \alpha} \nu_{\alpha R} , \quad (126)$$

oraz dla pól Higgsa:

$$\Phi'_i = \sum_{k=1}^{N_d} (A_p^\Phi)_{ik} \Phi_k . \quad (127)$$

Po takiej transformacji pól Lagranżjan (124) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} L'_Y &= - \sum_{i=1}^{N_d} \left[ (A_p^{L*})_{\alpha, \chi} \bar{L}_{\chi L} \right] (h_i^\nu)_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^{N_d} \left[ (A_p^\Phi)_{i, k} \Phi_k \right] \left[ (A_p^\nu)_{\beta, \delta} \nu_{\delta R} \right] = \\ &= - \sum_{k=1}^{N_d} \bar{L}_{\chi L} (\tilde{h}_k^\nu)_{\chi, \delta} \Phi_k \nu_{\delta R} , \end{aligned} \quad (128)$$

Przyjmujemy w dalszym ciągu konwencję, iż nie piszemy jawnie sum po zapachu, czyli:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} B_{\alpha} \equiv A_{\alpha} B_{\alpha} . \quad (129)$$

Parametry Yukawy  $(\tilde{h}_k^{\nu})_{\chi,\delta}$  (Rów. (128)) po transformacji wyrażają się w sposób:

$$\begin{aligned} (\tilde{h}_k^{\nu})_{\chi,\delta} &= \sum_{i=1}^{N_d} (A_p^{L\dagger})_{\chi,\alpha} (h_i^{\nu})_{\alpha,\beta} (A_p^{\Phi})_{i,k} (A_p^{\nu})_{\beta,\delta} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_d} \left( (A_p^{L\dagger} h_i^{\nu} A_p^{\nu}) \right)_{\chi,\delta} (A_p^{\Phi})_{i,k} . \end{aligned} \quad (130)$$

Dokonanie transformacji pól (125) - (127) nie zmienia całego Lagranżjanu naszego modelu oddziaływań elektroslabych. Interesuje nas symetria macierzy masowych wynikających z oddziaływań Yukawy, tak więc zakładamy, że: (123) oraz (128) są równe:

$$L_Y = L'_Y . \quad (131)$$

Stąd otrzymamy równość macierzy Yukawy przed i po transformacji:

$$(\tilde{h}_k^{\nu})_{\chi,\delta} = (h_k^{\nu})_{\chi,\delta} . \quad (132)$$

Tak więc:

$$\sum_{i=1}^{N_d} \left( A_p^{L\dagger} (h_i^{\nu}) (A_p^{\Phi})_{i,k} A_p^{\nu} \right)_{\chi,\delta} = (h_k^{\nu})_{\chi,\delta} , \quad (133)$$

i podobnie dla leptonów naładowanych:

$$\sum_{i=1}^{N_d} \left( A_p^{L\dagger} (h_i^l) (A_p^{\Phi})_{i,k} A_p^l \right)_{\chi,\delta} = (h_k^l)_{\chi,\delta} . \quad (134)$$

Przyjmując, że każde pole Higgsa jest użyte do spontanicznego złamania symetrii, macierz masowa ma postać:

- przed transformacją symetrii:

$$(M^{\nu})_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{N_d} v_i (h_i^{\nu})_{\alpha\beta} , \quad (135)$$

- i po transformacji symetrii:

$$(M'^{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{v}_i (\tilde{h}_i^{\nu})_{\alpha\beta} . \quad (136)$$

Potencjał Higgsa  $V(\Phi)$  jest symetryczny:

$$V(\Phi'_i) = V(\Phi_i) , \quad (137)$$

a więc jego minimum przed i po transformacji pol  $\Phi_i$  jest w tym samym punkcie, stąd:

$$\tilde{v}_i = v_i \quad (138)$$

i biorąc pod uwagę równanie (132) otrzymujemy symetryczność macierzy masowej:

$$M'^{\nu} = M^{\nu} . \quad (139)$$

W ogólnym przypadku mamy więc (patrz równanie (130)):

$$M'^{\nu} = A_p^{L\dagger} \tilde{M}^{\nu} A_p^{\nu} , \quad (140)$$

gdzie:

$$\tilde{M}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,k=1}^{N_d} v_k h_i^{\nu} (A_p^{\Phi})_{i,k} , \quad (141)$$

jest różne od macierzy masowej przed transformacją

$$\tilde{M}^{\nu} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{N_d} v_k h_k^{\nu} \equiv M^{\nu} . \quad (142)$$

W ogólności równość zachodzi tylko w przypadku, gdy  $N_d = 1$ , wtedy

$$(A_p^{\Phi})_{ik} = \delta_{ik} , \quad (143)$$

i mamy:

$$\tilde{M}^{\nu} = M^{\nu} . \quad (144)$$

Jak zobaczymy za chwilę rozróżnienie jest bardzo ważne. W przypadku jednej cząstki Higgsa mamy bowiem:

$$M'^{\nu} = M^{\nu} = A^{L\dagger} M^{\nu} A_p^{\nu} . \quad (145)$$

Wszystkie powyższe rozważania możemy powtórzyć dla leptonów naładowanych. Z relacji (134) otrzymamy:

$$M'^l = A_p^{L\dagger} \tilde{M}^l A_p^l , \quad (146)$$

gdzie

$$\tilde{M}^l = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,k=1}^{N_d} v_k h_i^l (A_p^{\Phi})_{i,k} , \quad (147)$$

a więc także w ogólności:

$$\tilde{M}^l \neq M^l . \quad (148)$$

Równość mamy dla jednej cząstki Higgsa jak w MS i wtedy:

$$M^l = M^l = A_p^{L\dagger} M^l A_p^L . \quad (149)$$

W dalszym ciągu, dalej w ramach MS, mając relacje (146) oraz (149) będziemy rozpatrywać hermitowskie macierze:

$$M^l M^{l\dagger} \text{ oraz } M^\nu M^{\nu\dagger} . \quad (150)$$

Dla nich mamy bowiem:

$$M^l M^{l\dagger} = A_p^{L\dagger} M^l A_p^L A_p^{L\dagger} M^{l\dagger} A_p^L = A_p^{L\dagger} (M^l M^{l\dagger}) A_p^L \quad (151)$$

i podobnie:

$$M^\nu M^{\nu\dagger} = A_p^{L\dagger} (M^\nu M^{\nu\dagger}) A_p^L . \quad (152)$$

Z relacji tych wynika, że zarówno macierz  $M^L M^{L\dagger}$  jak i  $M^\nu M^{\nu\dagger}$  komutują z unitarnymi macierzami reprezentacji grupy symetrii  $\mathcal{G}$ :

$$[M^L M^{L\dagger}, A_p^L] = 0, \quad [M^\nu M^{\nu\dagger}, A_p^L] = 0 . \quad (153)$$

Te unitarne kwadraty macierzy masowych mają po diagonalizacji na przekątnej, odpowiednio kwadraty mas leptonów naładowanych i neutrin jako wartości własne:

$$U_L^{l\dagger} M^l U_R^l = (M^l)_{diag}, \quad U_L^{\nu\dagger} M^\nu U_R^\nu = (M^\nu)_{diag} . \quad (154)$$

$$(U_R^\nu = U_L^{\nu*} \text{ dla neutrin Majorany})$$

Wiemy, że są trzy różne masy leptonów naładowanych i trzy różne masy neutrin, a więc macierze masowe nie są zdegenerowane. Wiemy też, że macierze komutujące mają wspólne wektory własne. Tak więc z (153) wynika, że macierze:

$$M^l M^{l\dagger}, \quad M^\nu M^{\nu\dagger} \text{ oraz } A_p^L , \quad (155)$$

mają wspólne wektory własne. Jeżeli poza tym macierze są niezdegenerowane, to te wspólne wektory własne, które z założenia są unormowane, są określone z dokładnością do faz.

Interesują nas macierze diagonalizujące  $M^{l\dagger}$  oraz  $M^{\nu\dagger}$ , z nich bowiem zbudowana jest macierz PMNS. Mamy więc:

$$M^l M^{l\dagger} \rightarrow U_L^{l\dagger} M^l U_R^l U_R^{l\dagger} M^{l\dagger} U_L^l = U_L^{l\dagger} (M^l M^{l\dagger}) U^l = (M^l)_{diag}^2 , \quad (156)$$

$$M^\nu M^{\nu\dagger} \rightarrow U_L^{\nu\dagger} M^\nu U_R^\nu U_R^{\nu\dagger} M^{\nu\dagger} U_L^\nu = U_L^{\nu\dagger} (M^\nu M^{\nu\dagger}) U_L^\nu = (M^\nu)_{diag}^2 . \quad (157)$$

Wiemy, teŝ że unitarne macierze diagonalizujące, a więc  $U_L^l$  oraz  $U_L^\nu$  są zbudowane z unormowanych wektorów własnych odpowiednio macierzy  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ , co widać z relacji (na przykład dla leptonów naładowanych):

$$(M^l M^{l\dagger}) U_L^l = U_L^l (M^l)_{diag}^2 . \quad (158)$$

Bardziej precyzyjnie kolumny macierzy  $U_L^l$  to, z dokładnością do fazy, są wektorami własnymi macierzy  $M^l M^{l\dagger}$ .

Z dyskusji powyŝszej (patrz (155)) wiemy, że macierze  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$  mają wspólne wektory własne, a więc takŝe macierze  $U_L^l$  oraz  $U_L^\nu$  z dokładnością do fazy, mają takie same kolumny, czyli w ogólności:

$$U_L^\nu = U_L^l \mathcal{F} , \quad (159)$$

gdzie:

$$\mathcal{F} = \text{diag}(e^{i\eta_1}, e^{i\eta_2}, e^{i\eta_3}) . \quad (160)$$

Stąd wynika, że w macierz mieszania PMNS w prądzie naładowanym:

$$U_{PMNS} = U_L^{l\dagger} U_L^\nu = U_L^{l\dagger} U_L^l \mathcal{F} = \mathcal{F} , \quad (161)$$

jest diagonalną macierzą trzech faz, co jak wiemy nie jest zgodne z danymi eksperymentalnymi (patrz rozdział 2). Jak zobaczymy za chwilę, aby otrzymać w MS akceptowalną macierz mieszania  $U_{PMNS}$ , symetria rodzinna musi być złamana.

W przypadku większej liczby cząstek Higgsa sytuacja taka nie ma miejsca, z równań (140) (146) mamy bowiem:

$$M^l M^{l\dagger} = A_p^{L\dagger} (\tilde{M}^l \tilde{M}^{l\dagger}) A_p^L \quad \text{ i } \quad \tilde{M}^l \tilde{M}^{l\dagger} \neq M^l M^{l\dagger} , \quad (162)$$

i podobnie:

$$M^\nu M^{\nu\dagger} = A_p^{L\dagger} (\tilde{M}^\nu \tilde{M}^{\nu\dagger}) A_p^L \quad \text{ i } \quad \tilde{M}^\nu \tilde{M}^{\nu\dagger} \neq M^\nu M^{\nu\dagger} . \quad (163)$$

Relacja komutacji (153) nie ma miejsca, a więc nie ma związku pomiędzy wektorami własnymi macierzy  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ . W takim razie kolumny macierzy diagonalizujących  $U_L^l$  oraz  $U_L^\nu$  (patrz (156) i (157)), za każdym razem równe wektorom własnym  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ , nie są ze sobą powiązane i relacje (159) oraz (161) nie mają miejsca. Aby więc otrzymać różną od diagonalnej macierz PMNS nie musimy łamać symetrii rodzinnej  $\mathcal{G}$ .



W przypadku Modelu Standardowego aby otrzymać  $U_{PMNS} \neq \mathcal{F}$  musimy założyć, że lewe pola leptonów naładowanych  $l_L$  i neutrin  $\nu_L$  muszą się transformować w różny sposób, a więc nie może być wspólnej transformacji dla dubletów:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \Rightarrow A_p^L \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (164)$$

i zamiast tego powinno być:

$$\nu_L \Rightarrow A_\nu^L \nu_L \quad \text{oraz} \quad l_L \Rightarrow A_l^L l_L \quad \text{z} \quad A_\nu^L \neq A_l^L. \quad (165)$$

Takiego złamania symetrii nie możemy zakładać na początku, gdyż Lagranżjan MS nie byłby niezmienniczy, a to był nasz wyjściowy warunek. Złamanie symetrii rodzinnej może być spontaniczne. Grupa symetrii rodzinnej nie powinna być ciągła. Wiemy bowiem, że złamanie globalnej ciągłej symetrii powoduje pojawienie się bezmasowych cząstek Goldstona, a tego chcemy uniknąć. Zakłada się więc, że grupa symetrii jest dyskretna.

W prezentowanej w pracy literaturze dyskutowane są dwa sposoby łamania symetrii rodzinnej. Obie klasy modeli zakładają, że globalna symetria rodzinna, po spontanicznym złamaniu manifestuje się poprzez „szczątkowe” pozostałości zakładanej symetrii.

Modele funkcjonujące w żargonie jako „proste” zakładają, że po złamaniu globalnej symetrii rodzinnej pojawiają się dwie różne jej podgrupy:

$$\mathcal{G} \rightarrow \{G, F\}. \quad (166)$$

Jedna z nich kojarzona jest z leptonami naładowanymi (najczęściej oznaczana jako  $F$ ) natomiast druga z neutrinami (najczęściej oznaczana jako  $G$ ). Leptonowa macierz mieszania wyznaczana jest jednoznacznie z symetrii. Podejście to bazuje na założeniu, że grupa symetrii Kleina  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  macierzy masowej neutrin jest identyfikowana z podgrupami globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ . Najczęściej do zrealizowania tej klasy modeli wymagane jest rozszerzenie sektora Higgsa, ale nie jest to warunek konieczny [60].

Dla klas modeli określane jako „złożone” symetria Kleina macierzy masowej neutrin nie jest identyfikowana z żadną z podgrup globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ . Symetrię  $G$  oraz  $F$  są dyktowane mechanizmem „seesaw” I-go rodzaju.

Jako naturalne przyjmuje się, że grupa  $\mathcal{G}$  jest podgrupą  $SU(3)$  [101]. Do chwili obecnej, w poszukiwaniu globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ , przebadane zostały wszystkie grupy do rzędu 511 [102]. W ocenie autora rozprawy prezentuje ona najlepsze, bo pozwalające porównać założenia teoretyczne z ewidencją eksperymentalną, kryterium istnienia globalnej symetrii. Jest to praca, która opiera się na metodzie „direct” i bazuje na twierdzeniu, że każdy proces mieszania prowadzi do symetrii  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  w macierzy masowej neutrin Majorany i

symetrii  $\mathbb{Z}_3$  w macierzy masowej leptonów naładowanych. „Szczątkowe” grupy  $G$  oraz  $F$  są iloczynami półprostymi globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ , co jest kluczowe dla modelowania macierzy mieszania leptonów i neutrin. W szczególności oznacza to, że nie można zdiagonalizować równocześnie w tym iloczynie półprostym wszystkich generatorów grup  $\mathbb{Z}_3$  i  $\mathbb{Z}_2$ . Każda z tych grup osobno, oczywiście, może być zaprezentowana przez diagonalne macierze 3-wymiarowe. To odstępstwo od współdiagonalizacji w iloczynie półprostym jest równocześnie źródłem nietrywialności macierzy mieszania. Wielkością kodującą ten efekt, uzyskaną bezpośrednio z reprezentacji grup  $\mathcal{G}$ , jest tzw *wektor mieszania* (mixing vector). Aby zweryfikować istnienie globalnej symetrii  $\mathcal{G}$  jest on bezpośrednio porównywany z odpowiednimi kolumnami macierzy PMNS za pośrednictwem testów statystycznych.

Ponieważ próby powiązania mieszania z nieabelową symetrią rodzinną nie dają rezultatu, w literaturze m. in. postuluje się dokładniejsze przebadanie tekstur zerowych i kryjących się za nimi symetrii abelowych. Jednocześnie wskazuje się na potrzebę uzyskania dokładnych danych eksperymentalnych pochodzących z eksperymentów oscylacyjnych neutrin. Z fenomenologicznego punktu widzenia „ratunkiem” dla koncepcji istnienia rodzinnych symetrii nieabelowych jest włączenie w sposób dający możliwość weryfikacji z doświadczeniem takich koncepcji jak: rozpatrzenie modeli zakładających sprzężenie z inną niż w MS cząstką Higgsa a także rozszerzenie rozważań o neutrina sterylne, zarówno przy założeniu obowiązywania MS oraz jego rozszerzeń. Jest to przedmiotem bieżącej pracy autora.

## 4.2 Związek między wyborem bazy dla leptonów naładowanych a symetrią rodzinną

Najczęściej wszystkie rozważania dotyczące symetrii horyzontalnej przeprowadza się w bazie w której fermiony dolne a więc kwarki d i naładowane leptony, są fizyczne, a więc mają określoną masę.

Rozważmy tę kwestię i zobaczmy jakie zmiany są konieczne i czy symetria rodzinna w bazie fizycznej jest inna w porównaniu z bazą masową. Tak jak poprzednio wprowadźmy wektory zbudowane ze stanów zapachowych. Dla leptonów naładowanych:

$$L_L = \begin{pmatrix} e_l \\ \nu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad L_R = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}, \quad (167)$$

oraz dla neutrin:

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad N_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}, \quad (168)$$

Macierze masowe w wyjściowych stanach zapachowych są określone następująco:

$$L_{mass}^l = -\bar{L}_{L\alpha} M_{\alpha\beta}^l L_{R\beta} + h.c. , \quad (169)$$

oraz:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_{L\alpha} M_{\alpha\beta}^\nu N_{R\beta} + h.c. . \quad (170)$$

Po transformacji unitarnej (gdzie stany fizyczne oznaczamy indeksem „i”)

$$L_{L\alpha} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 (U_L^l)_{\alpha i} L_{Li}, \quad L_{R\alpha} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 (U_R^l)_{\alpha i} L_{Ri}, \quad (171)$$

otrzymamy Lagranżjan masowy:

$$L_{mass}^l = -\bar{L}_{Li} (U_L^{l\dagger})_{i\alpha} M_{\alpha\beta}^l (U_R^l)_{\beta k} L_{Rk} + h.c. = -\sum_{i=1}^3 m_i^l \bar{L}_{Li} L_{Ri} + h.c. \quad (172)$$

podobnie dla neutrin:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_{Li} (U_L^{\nu\dagger})_{i\alpha} M_{\alpha\beta}^\nu (U_R^\nu)_{\beta k} N_{Rk} + h.c. = -\sum_{i=1}^3 m_i^\nu \bar{N}_{Li} N_{Ri} + h.c. \quad (173)$$

Niech:

$$(U_L^l)_{\alpha i} \equiv S_{\alpha i} \equiv S_{\alpha\beta}, \quad (174)$$

gdzie tym razem stan masowy „i” oznaczyliśmy przez „ $\beta$ ”, aby podkreślić, że w tym wypadku stan masowy jest tożsamy ze stanem zapachowym.

Dokonajmy na wszystkich stanach zapachowych identycznej transformacji:

$$L_L \Rightarrow S L_L, \quad L_R \Rightarrow S L_R, \quad (175)$$

$$N_L \Rightarrow S N_L, \quad N_R \Rightarrow S N_R, \quad (176)$$

Z symetrii Lorentza wynika, że cały Lagranżjan MS (ale także w przypadku uogólnień MS) z wyjątkiem Lagranżjanu Yukawy, nie ulega zmianie przy takiej transformacji.

Dokonując transformacji (175) i (176) macierze masowe (169) i (170) przekształcają się odpowiednio:

$$L_{mass}^l = -\bar{L}_L (S^\dagger M^l S) L_R + h.c. \quad (177)$$

oraz:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_L(S^\dagger M^\nu S)N_R + h.c. \quad (178)$$

W nowej bazie zdiagonalizujemy nasze macierze masowe:

$$\begin{aligned} L_{mass}^l &= -\bar{L}(U_L^{l\dagger} S^\dagger M^l S U_R^l) L_R + h.c. = -L_L(S^\dagger M^l U_R^l) L_R + h.c. = \\ &= \sum_\alpha m_\alpha^l \bar{L}_{L\alpha} L_{R\alpha} + h.c. , \end{aligned} \quad (179)$$

gdzie przyjęliśmy  $U_L^l = I$  oraz  $S U_R^l = U_R^l$  a także:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_L(U_L^{\nu\dagger} S^\dagger M^\nu S U_R^\nu) N_R + h.c. = -\bar{N}_L(U_L^{\nu\dagger} M^\nu U_R^\nu) N_R + h.c. , \quad (180)$$

gdzie tym razem  $S U_L^\nu = U_L^\nu$  oraz  $S U_R^\nu = U_R^\nu$ . Po takiej transformacji leptony naładowane mają określoną masę natomiast nowa macierz masowa neutrin jest diagonalizowana transformacją biunitarną z nowymi macierzami:

$$U_L^\nu = S^\dagger U_L^\nu \quad \text{oraz} \quad U_R^\nu = S^\dagger U_R^\nu . \quad (181)$$

W tej nowej bazie, macierz mieszania:

$$U_{PMNS} = U_L^l , \quad (182)$$

w prądzie naładowanym:

$$\bar{L}_L \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_L \rightarrow \bar{L}_L (U_L^{l\dagger} U_L^\nu) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_L = \bar{L}_L U_L^\nu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_L , \quad (183)$$

jest więc równa macierzy diagonalizującej kwadrat macierzy masowej  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ . W naszej nowej bazie macierz masowa neutrin ma postać:

$$\underline{M}^\nu = S^\dagger M^\nu S , \quad (184)$$

a także:

$$\underline{M}^\nu \underline{M}^{\nu\dagger} = S^\dagger (M^\nu M^{\nu\dagger}) S . \quad (185)$$

Jeżeli więc istniała symetria rodzinna w starej bazie:

$$[M^\nu M^{\nu\dagger}, A_p^l] = 0 , \quad (186)$$

to w nowej bazie też będzie istniała symetria rodzinna:

$$[\underline{M}^\nu \underline{M}^{\nu\dagger}, A_p^l] = 0 , \quad (187)$$

gdzie:

$$A_p^l = S^\dagger A_p^l S . \quad (188)$$

Nowe macierze  $A_p^l$  są połączone se starymi  $A_p^l$  transformacją podobieństwa, która opisuje tylko zmianą bazy i nie zmienia symetrii:

$$\mathcal{G} = \{A^{l,\dots}\} = \{A_p^l, \dots\} = \mathcal{G} . \quad (189)$$

W ten sposób po zmianie bazy symetrie rodzinne nie zmieniają się.

## 5 Podsumowanie

Z analizy dyskretnych nieabelowych symetrii rodzinnych wynika, że nie można ich trywialnie zrealizować. Większość dostępnych prac dotyczących takich symetrii koncentruje się głównie na założeniu, że wyjściowym modelem jest Model Standardowy, w którym występują trzy generacje kwarków i leptonów (bez neutrin sterylnych) oraz podstawowy sektor Higgsa z jednym dubletem. Dla takiego konwencjonalnego MS poszukiwanie symetrii rodzinnej, z nowymi danymi dla neutrinowej macierzy mieszania, szczególnie dla kąta różnego od zera zakończyło się fiaskiem. Przebadano różne grupy skończone aż do rzędu 511 nie otrzymując zgodności z doświadczeniem. Pomimo tego, iż prace z tej „masowej” części fizyki zapachu trwają już dość długo problem wciąż nie jest rozwiązany.

Wnioskiem z analiz w tym obszarze jest konieczność rozszerzenia prowadzonych badań. W szczególności o koncepcje takie jak: szczegółowe przebadanie teorii z bogatszym sektorem Higgsa - teorii z dwoma dubletami oraz trypletem, a także rozważenie sytuacji w której oprócz trzech aktywnych neutrin pojawiają się neutrina sterylne (jedno lub więcej) a sektor Higgsa ma strukturę standardową lub rozbudowaną.

O ile powiększenie sektora kwarkowego i sektora naładowanych leptonów jest trudne do zaakceptowania (dane doświadczalne silnie ograniczają takie hipotezy), to przyjęcie rozszerzonego sektora neutrinowego i innego sektora łamiącego symetrię cechowania jest ciągle rozważane. Poza tym, do tej pory analizowane modele przyjmują w zasadzie, że ta sama symetria zapachowa obowiązuje dla fermionów górnych (neutrina i kwarki typu „up” oraz dolnych (leptony naładowane i kwarki typu „down”), co w ogólności prowadzi do diagonalnej macierzy mieszania.

Brak globalnej symetrii nieabelowej był impulsem do uważniejszych analiz symetrii abelowych. W czasie gdy obowiązywał schemat TBM, który w dużej zgodności z doświadczeniem wynikał z symetrii nieabelowych, nie było konieczności stosowania grup cyklicznych. Spowodowało to odwrót od rozważania koncepcji je zakładających. Wobec silnej falsyfikacji schematu TBM, wynikającej z dokładniejszych oszacowań wartości parametrów macierzy mieszania neutrin, koncepcja symetrii abelowych stała się ponownie popularna. Grupy cykliczne zawsze można utożsamiać z zerami macierzy masowej neutrin. Daje to użyteczne narzędzie weryfikacji istnienia zakładanych symetrii. W rozprawie doktorskiej zaprezentowane zostały dwie grupy modeli rozważanych przy założeniu, że za kształtem macierzy masowej neutrin, a co za tym idzie kształtem leptonowej macierzy mieszania, kryją się symetrie abelowe. Zakładając zerowe wartości konkretnych elementów macierzy masowej neutrin, przebadane zostały możliwe realizacje tekstur zerowych zarówno dla

starszych, nieaktualnych już danych oscylacyjnych jak i dla danych bieżących. Przedstawiona została autorska metoda weryfikacji istnienia możliwych tekstur zerowych, bazująca na numerycznych obliczeniach Monte Carlo. Pokazano, że wraz z dokładniejszymi eksperymentalnymi oszacowaniami wartości modułów elementów macierzy mieszania, ilość możliwych różnych tekstur zerowych ulega ograniczeniu. Dla nieaktualnych już danych oscylacyjnych możliwe było siedem niezależnych tekstur z dwoma różnymi zerami oraz zabroniona była jedna tekstura z jednym zerem. Preferowane były oba schematy masowe dla neutrin zarówno schemat normalny jak i odwrotny. W świetle aktualnych danych oscylacyjnych ilość tekstur z dwoma zerami została ograniczona do pięciu, przy jednoczesnej preferencji normalnego schematu masowego. Utrzymany jest wniosek o tym, że nie realizowana jest tylko jedna tekstura zakładająca jedno zero.

W drugiej części rozdziału 3 zaprezentowana została analiza wpływu poszczególnych faz fizycznych na zależność modułu elementu macierzy masowej od masy najlżejszego neutrina. Fazy niefizyczne nie dają żadnego wkładu do modułu elementu macierzy masowej neutrin. Metoda ta została zaaplikowana do weryfikacji istnienia tekstur z jednym zerowym elementem macierzy masowej neutrin. Potwierdzone zostało, że na poziomie zgodności  $3\sigma$  nierealizowana jest tylko jedna tekstura. Wyprowadzony jest wniosek o tym, że tylko dla pewnych zakresów faz Majorany, moduły elementów macierzowych mogą być równe zero. Taka zależność nie była wcześniej dyskutowana w literaturze.

## Dodatek A Podstawowe definicje

Macierze Pauliego definiujemy jako:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right). \quad (190)$$

Wykorzystując powyższą definicję (190) można skonstruować dwa wektory:

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}) \quad \text{oraz} \quad \hat{\sigma}^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}). \quad (191)$$

Czterowymiarowe macierze ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) to tak zwane macierze Diraca spełniające następujące relacje antykomutacji:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (192)$$

oraz:

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (193)$$

Stosowana w tej pracy reprezentacja macierzy  $\gamma^\mu$  zwana jest reprezentacją chiralną (Weyla) i przyjmuje następującą postać:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \hat{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (194)$$

czyli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (195)$$

Wykorzystując macierze (194) można zdefiniować macierz chiralności  $\gamma_5$ :

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (196)$$

Stany:

$$\gamma_5 \psi = -\psi, \quad (197)$$

nazywamy lewoskrętnymi, natomiast stany:

$$\gamma_5 \psi = +\psi, \quad (198)$$

przez analogię - prawoskrętnymi.

Niech  $\psi$  będzie czterekomponentowym spinorem. Definiujemy operatory rzutowe  $P_L$ ,  $P_R$ :

$$\psi_L = P_L \psi \equiv \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi, \quad (199)$$

$$\psi_R = P_R \psi \equiv \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi. \quad (200)$$

Lewoskrętne (199) i prawoskrętne (200) spinory opisują stany własne operatora chiralności (196) odpowiadające wartościom własnym  $\pm 1$ .

Zauważmy następujące własności operatorów rzutowych:

$$P_L^2 = P_L, \quad (201)$$

$$P_R^2 = P_R, \quad (202)$$

$$0 = P_L P_R = P_R P_L, \quad (203)$$

$$I = P_L + P_R. \quad (204)$$

Z relacji (204), dowolny bispinor można przedstawić jako sumę dwu wkładów o przeciwnych chiralnościach:

$$\psi = I\psi = P_L \psi + P_R \psi \equiv \psi_L + \psi_R. \quad (205)$$

Pochodną  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ , definiuje się jako:

$$\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu, \quad (206)$$

co oznacza, że dla dowolnych spinorów  $\psi_1$  i  $\psi_2$ :

$$\psi_1^T \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_2 = \psi_1^T (\partial_\mu \psi_2) - (\partial_\mu \psi_1^T) \psi_2. \quad (207)$$

Ze względu na neutralny charakter neutrin istnieje możliwość narzucenia dodatkowego warunku (tzw. warunek Majorany):

$$\psi = \mathcal{C} \bar{\psi}^T = \psi^c, \quad (208)$$

gdzie:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0, \quad (209)$$

natomiast  $\mathcal{C}$  to operacja sprzężenia ładunkowego transformująca cząstkę w jej antycząstkę:

$$\psi(x) \rightarrow \psi^c(x) = \mathcal{C} \bar{\psi}^T(x) = -\gamma^0 \mathcal{C} \psi^*(x) \quad (210)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^c(x) = -\psi^T(x) \mathcal{C}^\dagger, \quad (211)$$



spełniająca następujące własności:

$$\mathcal{C}\gamma_\mu^T\mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu, \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1}, \quad \mathcal{C}^T = -\mathcal{C}. \quad (212)$$

Podobnie dla stanów lewych i prawych:

$$\psi_L \rightarrow (\psi^c)_L \equiv \psi_L^c = (\psi_R)^c, \quad (213)$$

$$\psi_R \rightarrow (\psi^c)_R \equiv \psi_R^c = (\psi_L)^c. \quad (214)$$

Narzucenie warunku Majorany oznacza, iż cząstka ma identyczne własności jak jej antycząstka.

Macierz  $\mathcal{C}$  jest równa:

$$\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0 \quad (215)$$

i w bazie Weyla ma postać:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (216)$$

gdzie:

$$\varepsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (217)$$

## Dodatek B Diagonalizacja macierzy

**Twierdzenie 1.** *Dowolną nieosobliwą macierz  $m$  można zdiagonalizować za pomocą podwójnej transformacji unitarnej:*

$$S^\dagger m T = m_d \quad (218)$$

*Dowód.* Macierz  $mm^\dagger$  jest hermitowska, istnieje więc unitarna macierz  $S$  taka, że:  $S^\dagger mm^\dagger S = m_d^2$ .

Zdefiniujmy:  $H = Sm_d S^\dagger = H^\dagger$  oraz  $V = H^{-1}m$ .

Macierz  $V$  jest unitarna, co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Zatem:  $m_d = S^\dagger HS = S^\dagger m V^\dagger S = S^\dagger m T$ , gdzie:  $T = V^\dagger S$ .  $\square$

**Twierdzenie 2.** *Dowolną symetryczną nieodobliwą macierz zespoloną można zdiagonalizować transformacją ortogonalną za pomocą macierzy unitarnej.*

*Dowód.* Korzystając z twierdzenia (1) mamy:  $S^\dagger m T = m_d$ , gdzie  $S$  i  $T$  są macierzami unitarnymi.

Zatem  $mm^\dagger = Sm_d^2 S^\dagger$  oraz  $mm^\dagger = T^* m_d^2 T^T$ .

Porównując otrzymamy:  $T^T Sm_d^2 = m_d^2 T^T S$ . Ponieważ macierz  $m_d^2$  jest diagonalną, więc macierz  $T^T S$  także musi być diagonalna. Jest ona także unitarna, więc można zapisać:  $T^T S = U$ , gdzie  $U_{ik} = e^{2i\alpha_k} \delta_{ik}$ .

Zatem wstawiając tę relację do wzoru diagonalizującego z twierdzenia (1) otrzymamy  $(T')^T m T' = m_d$ , gdzie  $T' = T(U^*)^{1/2}$   $\square$

## Dodatek C Podstawienia

Z równania (65) każdy element macierzy  $\mathcal{H}$  może być w łatwy sposób wyrażony za pomocą modułu i fazy  $(\mathcal{M}_\nu)_{a,b} = m_{a,b} e^{i\varphi_{a,b}}$ ,  $(a, b = e, \mu, \tau)$ . Wartości własne macierzy  $\mathcal{H}$ :

$$m_1^2 = \frac{2}{3}p \cos(\phi) - \frac{a}{3}, \quad (219)$$

$$m_2^2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}p \left( \cos(\phi) - \sqrt{3} \sin(\phi) \right), \quad (220)$$

$$m_3^2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}p \left( \cos(\phi) + \sqrt{3} \sin(\phi) \right), \quad (221)$$

gdzie:

$$p = \sqrt{a^2 - 3b}, \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{1}{p^2} \left( a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c \right) \right), \quad (222)$$

oraz:

$$a = -Tr[\mathcal{H}], \quad (223)$$

$$b = AD + AF + DF - B^2 - C^2 - E^2, \quad (224)$$

$$c = AE^2 + DC^2 + FB^2 - ADF - 2BCE \cos(\phi_1 + \phi_3 - \phi_2). \quad (225)$$

Znormalizowane wektory własne  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|X_1|^2 + |Y_1|^2 + |Z_1|^2}} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \quad (226)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= (D - m_1^2)(F - m_1^2) - E^2, \\ Y_1 &= C \cdot E e^{-i(\phi_2 - \phi_3)} - B e^{-i\phi_1}(F - m_1^2), \\ Z_1 &= B \cdot E e^{-i(\phi_1 + \phi_3)} - C e^{-i\phi_2}(D - m_1^2), \end{aligned} \quad (227)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|X_2|^2 + |Y_2|^2 + |Z_2|^2}} \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad (228)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= C \cdot E e^{i(\phi_2 - \phi_3)} - B e^{i\phi_1}(F - m_2^2), \\ Y_2 &= (A - m_2^2)(F - m_2^2) - C^2, \\ Z_2 &= B \cdot C e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - E e^{-i\phi_3}(A - m_2^2), \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|X_3|^2 + |Y_3|^2 + |Z_3|^2}} \cdot \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \quad (230)$$

$$\begin{aligned} X_3 &= B \cdot E e^{i(\phi_1 + \phi_3)} - C e^{i\phi_2}(D - m_3^2), \\ Y_3 &= B \cdot C e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} - E e^{i\phi_3}(A - m_3^2), \\ Z_3 &= (A - m_3^2)(D - m_3^2) - B^2. \end{aligned} \quad (231)$$

## Literatura

- [1] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar. **"Helicity of Neutrinos"**. *Phys. Rev.*, 109:1015–1017, Feb 1958. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1015>. [str. 7, 15]
- [2] B. Pontecorvo. **"Mesonium and anti-mesonium"**. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 33: 549-551 (1957) [*Sov. Phys. JETP* 6: 429. (1957)]. [str. 7]
- [3] F. Reines and C. L. Cowan. **"Detection of the Free Neutrino"**. *Phys. Rev.*, 92:830–831, Nov 1953. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.92.830>. [str. 7]
- [4] Frederick Reines and Clyde L. Cowan. **"Free Antineutrino Absorption Cross Section. I. Measurement of the Free Antineutrino Absorption Cross Section by Protons"**. *Phys. Rev.*, 113:273–279, Jan 1959. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.113.273>. [str. 7]
- [5] R. Davis. Bull. am. phys. soc. Washington meeting, 1959. [str. 7]
- [6] G. Danby, J-M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger. **"Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos"**. *Phys. Rev. Lett.*, 9:36–44, Jul 1962. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.9.36>. [str. 7]
- [7] Ziro Maki, Masami Nakagawa, and Shoichi Sakata. **"Remarks on the unified model of elementary particles"**. *Prog.Theor.Phys.*, 28:870–880, 1962. doi:10.1143/PTP.28.870. [str. 7]
- [8] B.T. Cleveland, Timothy Daily, Jr. Davis, Raymond, James R. Distel, Kenneth Lande, et al. **"Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector"**. *Astrophys.J.*, 496:505–526, 1998. doi:10.1086/305343. [str. 8]
- [9] Collaboration KAMIOKANDE. *Phys. Rev. Lett.* 63, 6 (1989); *Phys. Rev. Lett.* 65, 1297 (1990); *Phys. Rev. Lett.* 65, 1301 (1990); *Phys. Rev. Lett.* 66, 9 (1991); *Phys. Rev. D* 44, 2241 (1991). [str. 8]
- [10] Collaboration SAGE. *Phys. Rev. Lett.* 67, 3332 (1991); *Phys. Lett. B* 328, 234 (1994); *Phys. Rev. Lett.* 83, 4686 (1990); *Phys. Rev. C* 60, 055801 (1990). [str. 8]

- [11] Collaboration GALLEX. Phys. Lett. B285, 376 (1992); Phys. Lett. B285, 390 (1992); Phys. Lett. B357, 237 (1995). [str. 8]
- [12] V. Gribov and B. Pontecorvo. **"Neutrino astronomy and lepton charge"**. *Physics Letters B*, 28(7):493 – 496, 1969. Dostępne z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269369905255>. [str. 8]
- [13] Super-Kamiokande Collaboration and Y. Fukuda et al. **"Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos"**. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/9807003>. [str. 8]
- [14] F. del Aguila, J. Syska, and M. Zralek. **"Impact of right-handed interactions on the propagation of Dirac and Majorana neutrinos in matter"**. *Phys.Rev.*, D76:013007, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0702182>. [str. 10]
- [15] J. Beringer et al. **"Particle Data Group"**. *Phys. Rev. D*86, 010001, (2012). doi:10.1103/PhysRevD.86.010001. [str. 14, 15]
- [16] M.H. Ahn et al. **"Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment"**. *Phys.Rev.*, D74:072003, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0606032.pdf>. [str. 14]
- [17] K. Abe et al. **"Observation of Electron Neutrino Appearance in a Muon Neutrino Beam"**. *Phys.Rev.Lett.*, 112:061802, 2014. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1311.4750.pdf>. [str. 14, 20]
- [18] S. Abe et al. **"Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND"**. *Phys.Rev.Lett.*, 100:221803, 2008. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/0801.4589.pdf>. [str. 14]
- [19] P. Adamson et al. **"Measurement of Neutrino and Anti-neutrino Oscillations Using Beam and Atmospheric Data in MINOS"**. *Phys.Rev.Lett.*, 110(25):251801, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1304.6335.pdf>. [str. 14, 20]
- [20] Dominique Duchesneau. **"The OPERA Long Baseline Experiment: Status and First Results"**. 2008. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0810.2476>. [str. 14]
- [21] A.A. Aguilar-Arevalo et al. **"The MiniBooNE Detector"**. *Nucl.Instrum.Meth.*, A599:28–46, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/0806.4201.pdf>. [str. 14]

- [22] J.N. Abdurashitov et al. **"Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal"**. *Phys.Rev.*, C60:055801, 1999. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9907113.pdf>. [str. 14]
- [23] M. Ishitsuka. **"Super-Kamiokande results: Atmospheric and solar neutrinos"**. 2004. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0406076>. [str. 14]
- [24] J. Boger et al. **"The Sudbury neutrino observatory"**. *Nucl.Instrum.Meth.*, A449:172–207, 2000. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/nucl-ex/9910016>. [str. 14]
- [25] A.B. McDonald. **"Sudbury neutrino observatory results"**. *Phys.Scripta*, T121:29–32, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0412060>. [str. 14]
- [26] Albrecht Karle. **"IceCube: Construction Status and First Results"**. *Nucl.Instrum.Meth.*, A604:S46–S52, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0812.3981>. [str. 14]
- [27] G. Alimonti et al. **"The Borexino detector at the Laboratori Nazionali del Gran Sasso"**. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 600:568–593, March 2009. doi:10.1016/j.nima.2008.11.076. [str. 14]
- [28] F.P. An et al. **"Spectral measurement of electron antineutrino oscillation amplitude and frequency at Daya Bay"**. *Phys.Rev.Lett.*, 112:061801, 2014. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1310.6732.pdf>. [str. 14, 20]
- [29] D. V. Forero, M. Tórtola, and J. W. F. Valle. **"Global status of neutrino oscillation parameters after recent reactor measurements"**. Technical Report IFIC/12-31, May 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1205.4018>. [str. 16]
- [30] G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo, et al. **"Global analysis of neutrino masses, mixings and phases: entering the era of leptonic CP violation searches"**. *Phys.Rev.*, D86:013012, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1205.5254v3>. [str. 16, 37, 38]
- [31] M.C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Jordi Salvado, and Thomas Schwetz. **"Global fit to three neutrino mixing: critical look at present precision"**. *JHEP*, 12:123, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1209.3023v3>. [str. 16]

- [32] W. Pauli. Neutrino Physics edited by K. Winter. *Cambridge University Press*, 1991. [str. 15]
- [33] E. Fermi. *Ricerca Scient.*, 2:12, 1933. [str. 15]
- [34] E. Fermi. **"An attempt of a theory of beta radiation. 1."**. *Z.Phys.*, 88:161–177, 1934. doi:10.1007/BF01351864. [str. 15]
- [35] F. Perrin. *Comptes Rendues*, 197:1625, 1933. [str. 15]
- [36] L. M. Langer and R. J. D. Moffat. **"The Beta-Spectrum of Tritium and the Mass of the Neutrino"**. *Phys. Rev.*, 88:689–694, Nov 1952. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.88.689>. [str. 15]
- [37] Ch. Kraus, B. Bornschein, L. Bornschein, J. Bonn, B. Flatt, et al. **"Final Results from phase II of the Mainz Neutrino Mass Search in Tritium Beta Decay"**. *Eur.Phys.J.C*, 40:447–468, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0412056>. [str. 15]
- [38] V. N. Aseev, A. I. Belev, A. I. Berlev, E. V. Geraskin, A. A. Golubev, et al. **"An upper limit on electron antineutrino mass from Troitsk experiment"**. *Phys. Rev. D*, 84:112003, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1108.5034>. [str. 15]
- [39] M. Goeppert-Mayer. **"Double Beta-Disintegration"**. *Phys. Rev.*, 48:512–516, Sep 1935. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.512>. [str. 16]
- [40] Giulio Racah. **"Sulla Simmetria Tra Particelle e Antiparticelle"**. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 14:322–328, 1937. doi:10.1007/BF02961321. Dostępne z: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02961321>. [str. 16]
- [41] W. H. Furry. **"On Transition Probabilities in Double Beta-Disintegration"**. *Phys. Rev.*, 56:1184–1193, Dec 1939. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.1184>. [str. 16]
- [42] S.M. Bilenky and C. Giunti. **"Neutrinoless double-beta decay. A brief review"**. 03 2012. arXiv:<http://arxiv.org/abs/1203.5250v1>. [str. 16]
- [43] A.M. Bakalyarov, A. Ya. Balysh, S.T. Belyaev, V.I. Lebedev, and S.V. Zhukov. **"Results of the experiment on investigation of Germanium-76 double beta decay: Experimental data"**

- of Heidelberg-Moscow collaboration November 1995 - August 2001". *Phys.Part.Nucl.Lett.*, 2:77–81, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0309016v1>. [str. 17]
- [44] R. Arnold et al. "Limits on different Majoron decay modes of Mo-100 and Se-82 for neutrinoless double beta decays in the NEMO-3 experiment". *Nucl.Phys.*, A765:483–494, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0601021.pdf>. [str. 17]
- [45] A.S. Barabash, V.B. Brudanin, and NEMO Collaboration. "Investigation of double beta decay with the NEMO-3 detector". 02 2010. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1002.2862v1>. [str. 17]
- [46] C. A. Ur. "The GERDA experiment: status and perspectives". *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 217:38–40, 2011. doi:10.1016/j.nuclphysbps.2011.04.061. [str. 17]
- [47] F.Bellini, C.Bucci, S.Capelli, et al. "Monte Carlo evaluation of the external gamma, neutron and muon induced background sources in the CUORE experiment". 12 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0912.0452v3>. [str. 17]
- [48] KamLAND-Zen Collaboration. "Measurement of the double-beta decay half-life of Xe with the KamLAND-Zen experiment". 01 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1201.4664>. [str. 17]
- [49] R. Gornea. "Search for double beta decay with the EXO-200 TPC and prospects for barium ion tagging in liquid xenon". *J. Phys. Conf. Ser.*, 309:012003, 2011. doi:10.1088/1742-6596. [str. 17]
- [50] S. Schael et al. "Precision electroweak measurements on the Z resonance". *Phys.Rept.*, 427:257–454, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0509008>. [str. 17]
- [51] Bartosz Dziewit, Sebastian Zajac, and Marek Zralek. "Majorana neutrino mass matrix with CP symmetry breaking". *Acta Phys.Polon.*, B42:2509–2516, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1204.3665>. [str. 17, 45]
- [52] P.F. Harrison, D.H. Perkins, and W.G. Scott. "Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data". *Phys.Lett.*, B530:167, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0202074v1>. [str. 19]

- [53] Ernest Ma. " **$A_4$  symmetry and neutrinos with very different masses**". *Phys.Rev.*, D70:031901, 2004. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0404199>. [str. 20]
- [54] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. "**Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete symmetry in extra dimensions**". *Nucl.Phys.*, B720:64–88, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0504165.pdf>. [str. 20]
- [55] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. "**Tri-bimaximal neutrino mixing,  $A(4)$  and the modular symmetry**". *Nucl.Phys.*, B741:215–235, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0512103.pdf>. [str. 20]
- [56] K.S. Babu and Xiao-Gang He. "**Model of geometric neutrino mixing**". 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0507217.pdf>. [str. 20]
- [57] I. de Medeiros Varzielas, S.F. King, and G.G. Ross. "**Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete subgroups of  $SU(3)$  and  $SO(3)$  family symmetry**". *Phys.Lett.*, B644:153–157, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0512313>. [str. 20]
- [58] W. Grimus and L. Lavoura. "**Tri-bimaximal lepton mixing from symmetry only**". *J. High Energy Phys.*, 2009(04):013+, April 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0811.4766>. [str. 20]
- [59] R.N. Mohapatra, S. Nasri, and Hai-Bo Yu. " **$S_3$  symmetry and tri-bimaximal mixing**". *Phys.Lett.*, B639:318–321, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0605020>. [str. 20]
- [60] C.S. Lam. "**The Horizontal Symmetry for Neutrino Mixing**". *Phys.Rev.Lett.*, 101:121602, 2008. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0804.2622>. [str. 20, 61]
- [61] Federica Bazzocchi and Stefano Morisi. " **$S(4)$  as a natural flavor symmetry for lepton mixing**". *Phys.Rev.*, D80:096005, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/0811.0345>. [str. 20]
- [62] Ferruccio Feruglio, Claudia Hagedorn, Yin Lin, and Luca Merlo. "**Tri-bimaximal Neutrino Mixing and Quark Masses from a Discrete Flavour Symmetry**". *Nucl.Phys.*, B775:120–142, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0702194>. [str. 20]



- [63] Paul D. Carr and Paul H. Frampton. **"Group Theoretic Bases for Tribimaximal Mixing"**. 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0701034>. [str. 20]
- [64] I. de Medeiros Varzielas, S.F. King, and G.G. Ross. **"Neutrino tri-bi-maximal mixing from a non-Abelian discrete family symmetry"**. *Phys.Lett.*, B648:201–206, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0607045>. [str. 20]
- [65] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Okada, Yusuke Shimizu, and Morimitsu Tanimoto. **"Lepton Flavor Model from  $\Delta(54)$  Symmetry"**. *JHEP*, 0904:011, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0811.4683>. [str. 20]
- [66] J.K. Ahn et al. **"Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment"**. *Phys.Rev.Lett.*, 108:191802, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1204.0626.pdf>. [str. 20]
- [67] H. Nishiura, K. Matsuda, and T. Fukuyama. **"Lepton and quark mass matrices"**. *Phys.Rev.*, D60:013006, 1999. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9902385>. [str. 21]
- [68] Zhi-zhong Xing. **"Texture zeros and Majorana phases of the neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B530:159–166, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0201151>. [str. 21]
- [69] Zhi-zhong Xing. **"A Full determination of the neutrino mass spectrum from two zero textures of the neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B539:85–90, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0205032>. [str. 21]
- [70] Paul H. Frampton, Sheldon L. Glashow, and Danny Marfatia. **"Zeroes of the neutrino mass matrix"**. *Physics Letters B*, 536(1-2):79 – 82, 2002. Dostępne z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302018178>. [str. 22, 23, 35, 82]
- [71] Alexander Merle and Werner Rodejohann. **"The Elements of the neutrino mass matrix: Allowed ranges and implications of texture zeros"**. *Phys.Rev.*, D73:073012, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0603111>. [str. 22, 34, 47]

- [72] S. Dev, Sanjeev Kumar, Surender Verma, and Shivani Gupta. **"Phenomenology of two-texture zero neutrino mass matrices"**. *Phys.Rev.*, D76:013002, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0612102>. [str. 22]
- [73] Harald Fritzsch, Zhi-zhong Xing, and Shun Zhou. **"Two-zero Textures of the Majorana Neutrino Mass Matrix and Current Experimental Tests"**. *JHEP*, 1109:083, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1108.4534>. [str. 22]
- [74] Luis Lavoura. **"Zeros of the inverted neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B609:317–322, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0411232>. [str. 22]
- [75] E.I. Lashin and N. Chamoun. **"Zero minors of the neutrino mass matrix"**. *Phys.Rev.*, D78:073002, 2008. arXiv:<http://arxiv.org/abs/0708.2423>. [str. 22]
- [76] S. Dev, Surender Verma, Shivani Gupta, and R.R. Gautam. **"Neutrino Mass Matrices with a Texture Zero and a Vanishing Minor"**. *Phys.Rev.*, D81:053010, 2010. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1003.1006>. [str. 22]
- [77] Takeshi Fukuyama and Hiroyuki Nishiura. **"Mass matrix of Majorana neutrinos"**. 1997. arXiv:[hep-ph/9702253](http://arxiv.org/abs/hep-ph/9702253). [str. 22]
- [78] Satoru Kaneko, Hideyuki Sawanaka, and Morimitsu Tanimoto. **"Hybrid textures of neutrinos"**. *JHEP*, 0508:073, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0504074>. [str. 22]
- [79] S. Dev, Surender Verma, and Shivani Gupta. **"Phenomenological Analysis of Hybrid Textures of Neutrinos"**. *Phys.Lett.*, B687:53–60, 2010. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0909.3182>. [str. 22]
- [80] W. Grimus and P.O. Ludl. **"Two-parameter neutrino mass matrices with two texture zeros"**. *J.Phys.*, G40:055003, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1208.4515>. [str. 22]
- [81] Atsushi Kageyama, Satoru Kaneko, Noriyuki Shimoyama, and Morimitsu Tanimoto. **"Seesaw realization of the texture zeros in the neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B538:96–106, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0204291>. [str. 22]

- [82] Peter Minkowski. " **$\mu \rightarrow e\gamma$  at a rate of one out of 109 muon decays?**". *Physics Letters B*, 67(4):421 – 428, 1977. Dostępne z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026937790435X>. [str. 22]
- [83] Murray Gell-Mann, Pierre Ramond, and Richard Slansky. "**Complex Spinors and Unified Theories**". *Conf.Proc.*, C790927:315–321, 1979. arXiv:1306.4669. [str. 22]
- [84] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. "**Neutrino Mass and Spontaneous Parity Violation**". *Phys.Rev.Lett.*, 44:912, 1980. doi:10.1103/PhysRevLett.44.912. [str. 22]
- [85] Walter Grimus, Anjan S. Joshipura, Luis Lavoura, and Morimitsu Tanimoto. "**Symmetry realization of texture zeros**". *Eur.Phys.J.*, C36:227–232, 2004. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0405016>. [str. 22]
- [86] Walter Grimus. "**Neutrino mass matrices, texture zeros, and family symmetries**". *PoS*, HEP2005:186, 2006. arXiv:hep-ph/0511078. [str. 23]
- [87] Harald Fritzsch and Zhi-zhong Xing. "**Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons**". *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 45:1–81, 2000. arXiv:<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9912358>. [str. 23]
- [88] M. Hirsch, Anjan S. Joshipura, S. Kaneko, and J. W. F. Valle. "**Predictive Flavor Symmetries of the Neutrino Mass Matrix**". *Phys. Rev. Lett.*, 99:151802, Oct 2007. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.151802>. [str. 24]
- [89] Walter Grimus and Luis Lavoura. "**On a model with two zeros in the neutrino mass matrix**". *J.Phys.*, G31:693–702, 2005. arXiv:<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0412283>. [str. 24]
- [90] S. Dev, Shivani Gupta, and Radha Raman Gautam. "**Zero Textures of the Neutrino Mass Matrix from Cyclic Family Symmetry**". *Phys.Lett.*, B701:605–608, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1106.3451>. [str. 24]
- [91] B. Dziewit, K. Kajda, J. Gluza, and M. Zralek. "**Majorana neutrino textures from numerical considerations: The CP conserving case**". *Phys.Rev.*, D74:033003, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0604193>. [str. 26, 31]

- [92] **The NAG Fortran Library (2013).** Dostępne z: <http://www.nag.co.uk/>. [str. 26]
- [93] M.C. Gonzalez-Garcia. **"Global analysis of neutrino data"**. *Phys.Scripta*, T121:72–77, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0410030>. [str. 31, 32, 81, 82]
- [94] Dostępne z: [http://prac.us.edu.pl/~gluza/www\\_neutrinos/neutrino](http://prac.us.edu.pl/~gluza/www_neutrinos/neutrino). [str. 31, 35]
- [95] S. Pascoli and S.T. Petcov. **"The SNO solar neutrino data, neutrinoless double beta decay and neutrino mass spectrum"**. *Phys.Lett.*, B544:239–250, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0205022>. [str. 32]
- [96] Zhi-zhong Xing. **"Vanishing effective mass of the neutrinoless double beta decay?"**. *Phys.Rev.*, D68:053002, 2003. [arXiv:hep-ph/0305195](http://arxiv.org/abs/hep-ph/0305195). [str. 34]
- [97] F. Capozzi, G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, et al. **"Status of three-neutrino oscillation parameters, circa 2013"**. 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1312.2878>. [str. 37]
- [98] W. Grimus and P.O. Ludl. **"Correlations of the elements of the neutrino mass matrix"**. *JHEP*, 1212:117, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1209.2601v2>. [str. 47]
- [99] Stephen F. King and Christoph Luhn. **"Neutrino Mass and Mixing with Discrete Symmetry"**. *Rept.Prog.Phys.*, 76:056201, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1301.1340>. [str. 54]
- [100] Stephen F. King, Alexander Merle, Stefano Morisi, Yusuke Shimizu, and Morimitsu Tanimoto. **"Neutrino Mass and Mixing: from Theory to Experiment"**. *New J.Phys.*, 16:045018, 2014. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1402.4271>. [str. 54]
- [101] Walter Grimus and Patrick Otto Ludl. **"Finite flavour groups of fermions"**. *J.Phys.*, A45:233001, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1110.6376>. [str. 61]
- [102] C.S. Lam. **"Finite Symmetry of Leptonic Mass Matrices"**. *Phys.Rev.*, D87:013001, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1208.5527>. [str. 61]

## Spis rysunków

1	<i>Hierarchia normalna i odwrotna.</i> . . . . .	15
2	<i>Tekstura A1. Pierwszy (wykres górny) i drugi (wykres dolny) etap losowania. Wykresy uzyskane dla <math>N_{\text{scat}} = N_{\text{calc}} = N_{\text{it}} = 100</math>.</i> . . . . .	30
3	<i>Dozwolone regiony parametrów macierzy masowej neutrin zgodne z [93]</i> . . . . .	32
4	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin: przypadek ogólny, hierarchia normalna.</i> . . . . .	33
5	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin: przypadek ogólny, hierarchia odwrotna.</i> . . . . .	33
6	<i>Tekstura A: Dozwolone wartości parametrów macierzy masowej neutrin dla <math>\alpha = 1</math> oraz <math>\alpha = 2</math>.</i> . . . . .	34
7	<i>Tekstura A: Histogramy kątów obrotów.</i> . . . . .	35
8	<i>Możliwe wartości sinusów kątów mieszania <math>\theta_{12}</math>, <math>\theta_{23}</math>, oraz <math>\theta_{13}</math> dla różnych tekstur macierzy masowej neutrin.</i> . . . . .	36
9	<i>Dozwolone regiony parametrów macierzy masowej neutrin.</i> . . . . .	39
10	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin dla bieżących danych oscylacyjnych: przypadek ogólny, hierarchia normalna.</i> . . . . .	40
11	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin dla bieżących danych oscylacyjnych: przypadek ogólny, hierarchia odwrotna.</i> . . . . .	40
12	<i>Tekstura A: Histogramy kątów obrotów, dla bieżących danych oscylacyjnych.</i> . . . . .	41
13	<i>Pierwszy wiersz histogramy dla tekstur A1 i A2, w drugi wiersz dla tekstur B1 oraz B3, w trzecim dla tekstury C.</i> . . . . .	43
14	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{11} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	48
15	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{12} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	49
16	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{13} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	50
17	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{22} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	51
18	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{33} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	52
19	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{33} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	53

## Spis tabel

1	<i>Trzy rodziny fermionów Modelu Standardowego, wraz z odpowiadającymi im masami (w MeV).</i>	1
2	<i>Podsumowanie parametrów oscylacyjnych dla neutrin.</i>	16
3	<i>Ograniczenia na masę z bezneutrinowego podwójnego rozpadu <math>\beta</math>.</i>	17
4	<i>Pomiary „reaktorowego” kąta mieszania <math>\sin^2 2\theta_{13}</math>.</i>	20
5	<i>Siedem dozwolonych tekstur z dwoma zerami, o których mowa jest w pracy [70].</i>	23
6	<i>Dozwolone wartości centralne i błędy na poziomie <math>3\sigma</math> modułów macierzy mieszania <math> U_{ij} </math> oraz różnic kwadratów mas <math>\Delta m_{32}^2</math>, <math>\Delta m_{21}^2</math> pochodzące z pracy [93].</i>	31
7	<i>Dozwolone tekstury z dwoma zerami.</i>	35
8	<i>Zmiana startowej wartości <math>x_i^{cent}</math> w wyniku działania procedury AMC.</i>	37
10	<i>Dozwolone tekstury z dwoma zerami.</i>	42
11	<i>Zmiana wartości centralnej <math>x_i^{cent}</math> w wyniku działania procedury AMC.</i>	43

Uniwersytet Śląski w Katowicach  
Wydział Matematyki Fizyki i Chemii  
Instytut Fizyki

Rozprawa doktorska

**Leptonowa macierz mieszania - aspekty  
symetrii i analiza numeryczna**

Bartosz Dziewit

Promotor

Prof. dr hab. Marek Zrałek

9 maja 2014

Cześć pracy wykonana jest w ramach projektu badawczego o numerze:  
UMO-2013/09B/ST2/03382

*Dziękuję prof. dr hab. Markowi Zrałkowi, pod kierunkiem którego powstała ta rozprawa, za cierpliwość, życzliwość i wiarę w moją osobę, obejmującą nie tylko sprawy naukowe. Za wiele lat współpracy i opieki.*

*Przede wszystkim jednak za profesjonalizm i stale płynącą dla mnie naukę z relacji uczeń - Mistrz.*

*Wszystkim pracownikom Zakładu Teorii Pola i Cząstek Elementarnych których pomoc i wkład w rozwój mojej osoby, tu również nie tylko na polu zawodowym - cenię. Prof. dr hab. Karolowi Kołodziejowi, prof. dr hab. Henrykowi Czyżowi, prof. dr hab. Januszowi Gluzie, dr hab. Jackowi Sysce.*

*Pracownikom Zakładu Astrofizyki i Kosmologii: prof. dr hab. Janowi Śladowskiemu, prof. dr hab. Markowi Biesiadzie, prof. dr hab. Ilonie Bednarek. Pracownikom Zakładu Fizyki Ciała stałego: prof. dr hab. Elżbiecie Zipper, prof. dr hab. Jurkowi Dajce, prof. dr hab. Maciejowi Maśce, prof. dr hab. Marcinowi Mierzejewskiemu, prof. dr hab. Markowi Szopie, prof. dr hab. Władysławowi Borgielowi.*

*Przyjaciółom bez których zaangażowania nie byłoby możliwe ukończenie tej pracy: Jerzemu Królowi i Sebastianowi Zającowi.*

*Aleksandrze Piórkowskiej, Ani Szczypińskiej, Ani Gorczyca-Goraj, Monice Pienskoś, Agacie Bielas, Szymonowi Szczypińskiemu, Marcinowi Kurpasowi, Łukaszowi Machurze, Krzysztofowi Bielasowi, Irkowi Pakule, Adamowi Staroniowi, Tomkowi Jelińskiemu, Krzysztofowi Kajdzie, Mariuszowi Lisowskiemu.*

*Dziękuję bliskim z rodziny a szczególnie rodzicom za trud wychowania.*

*Dianie Domańskiej, której dedykuję rozprawę, a której serce było jej motorem napędowym.*



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>4</b>
2.1	Masa neutrin w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach . . . . .	4
2.2	Oscylacje neutrin i macierz mieszania leptonów . . . . .	7
2.3	Doświadczalne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin . . . . .	14
2.4	Analityczne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin . . . . .	17
2.5	Wzorce symetrii macierzy mieszania . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Symetrie abelowe macierzy masowej leptonów z teksturami zerowymi</b>	<b>22</b>
3.1	Przykład realizacji symetrii abelowej dla tekstury z dwoma zerami . . . . .	23
3.2	Tekstury zerowe dla neutrin majorany w przypadku zachowanej symetrii CP . . . . .	26
3.2.1	Opis algorytmu weryfikacji tekstur zerowych . . . . .	26
3.2.2	Krótki przegląd wyników opartych na starych, mniej precyzyjnych danych doświadczalnych . . . . .	31
3.2.3	Analiza obecnych danych doświadczalnych . . . . .	37
3.3	Fenomenologiczna rekonstrukcja macierzy masowej leptonów w funkcji masy najbliższego neutrina . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Nieabelowe dyskretne grupy symetrii macierzy masowej leptonów</b>	<b>54</b>
4.1	Symetrie nieabelowe w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach . . . . .	54
4.2	Związek między wyborem bazy dla leptonów naładowanych a symetrią rodzinną . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>65</b>
	<b>Dodatek A Podstawowe definicje</b>	<b>67</b>
	<b>Dodatek B Diagonalizacja macierzy</b>	<b>69</b>
	<b>Dodatek C Podstawienia</b>	<b>70</b>
	<b>Literatura</b>	<b>71</b>
	<b>Spis rysunków</b>	<b>81</b>
	<b>Spis tabel</b>	<b>81</b>

# 1 Wstęp

W Modelu Standardowym (MS) cząstek elementarnych rozróżnia się trzy rodziny fermionów. W każdej z tych rodzin mamy dwa rodzaje kwarków z wartością ładunku elektrycznego  $Q = 2/3$  i  $Q = -1/3$  oraz dwa rodzaje leptonów, z ładunkiem  $Q = -1$  oraz  $Q = 0$ . Prawie wszystkie własności kwantowe podobnych cząstek w rodzinach są identyczne. Masy natomiast różnią się diametralnie. Przedstawione są one w poniższej tabeli.

Rodzina	1-sza	2-ga	3-cia
Kwarki	<b>u</b> (2.3)	<b>c</b> (1275)	<b>t</b> (173940)
	<b>d</b> (4.8)	<b>s</b> (95)	<b>b</b> (4180)
Leptony	<b>e</b> (0.511)	<b><math>\mu</math></b> (105.7)	<b><math>\tau</math></b> (1776.8)
	<b><math>\nu_e</math></b> ( $\sim 10^{-6}$ )	<b><math>\nu_\mu</math></b> ( $\sim 10^{-6}$ )	<b><math>\nu_\tau</math></b> ( $\sim 10^{-6}$ )

Tabela 1: *Trzy rodziny fermionów Modelu Standardowego, wraz z odpowiadającymi im masami (w MeV). Dla neutrin znane są tylko górne ograniczenia wartości mas.*

Model Standardowy oddziaływań fundamentalnych jest, przy obecnie osiągalnych energiach, bardzo dobrze pracującą teorią. Powszechnie uważa się jednak, że jest to teoria efektywna, która przy większych energiach będzie wymagać modyfikacji. Nawet przy swojej dużej zgodności z eksperymentem także i obecnie MS nie satysfakcjonuje. Zgadza się z eksperymentem, ale kosztem doboru wielu (ponad 20) parametrów. Część tych wyznaczanych z doświadczenia parametrów to: masy, kąty mieszania i fazy łamania symetrii CP kwarków i leptonów (6 mas kwarków, 6 mas leptonów oraz odpowiednio 4 - dla neutrin Diraca lub 6 - dla neutrin Majorany, parametrów macierzy mieszania). Znany jest mechanizm, dzięki któremu w MS, cząstki początkowo bezmasowe po spontanicznym złamaniu symetrii nabywają masę. Mechanizm ten, zwany mechanizmem Higgsa, polega na oddziaływaniu cząstek z tak zwanym polem Higgsa, które przenika całą przestrzeń. Jest już prawie pewne, że cząstka Higgsa została odkryta w LHC, choć końcowe potwierdzenie nastąpi po dalszym zbadaniu kanałów rozpadu obserwowanego rezonansu. Pomimo znajomości mechanizmu nabywania masy przez cząstki elementarne nie można twierdzić, że w ogólności problem masy fermionów został rozwiązany. Nie znamy bowiem siły oddziaływania każdej cząstki z polem Higgsa, co oznacza,

iż nie znamy stałych Yukawy występujących w potencjale Yukawy i nie potrafimy obliczyć numerycznych wartości mas z pierwszych zasad. Dodatkowo nie wiemy dlaczego istnieją trzy rodziny kwarków i leptonów oraz czy są to wszystkie rodziny. Dlaczego masy wszystkich naładowanych fermionów mają strukturę hierarchiczną, z masami dolnych kwarków tego samego rzędu co odpowiadające im masy naładowanych leptonów? W chwili obecnej nie potrafimy określić wartości mas neutrin ale wiemy, że ich wartości są rzędu  $10^{-6}$  MeV, co rodzi naturalne pytanie dlaczego są one tak małe w porównaniu z innymi cząstkami.

Można rozważać modele zakładające, że zarówno w sektorze leptonowym jak i kwarkowym istnieją fundamentalne symetrie wiążące między sobą fermiony różnych generacji dające relacje pomiędzy masami oraz elementami macierzy mieszania w ramach rodziny. Istnienie takich symetrii redukowałoby ilość swobodnych parametrów MS oraz mogłoby pomóc w odpowiedzi na wymienione wyżej pytania i wskazać jaka teoria uogólni Model Standardowy. W fizyce cząstek elementarnych powiązanie symetrią mas i elementów macierzy mieszania dla kwarków i leptonów ma wielkie znaczenie dla dalszych badań. Być może przyczyni się to do pełnego rozwikłania natury masy składników materii, które z pewnością wymaga wyjścia poza MS. Wykazanie, że istnieje pewna symetria może pomóc w poszukiwaniu uogólnień MS, bowiem wydaje się, że przyszła teoria powinna taką symetrię posiadać. Z drugiej strony, niemożliwość znalezienia takiej symetrii może wskazywać na inne pochodzenie masy cząstek elementarnych.

Poszukiwanie globalnej, pierwotnej symetrii można ograniczyć do sektora leptonowego, a właściwie do testowania macierzy Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakaty (PMNS) w tym sektorze. Istnieją dwa główne powody takiego wyboru. Po pierwsze, poszukujemy symetrii przed spontanicznym złamaniem. W wyniku jej spontanicznego złamania, masy kwarków „up”, kwarków „down” i naładowanych leptonów różnią się znacznie pomiędzy generacjami. Trudno w takiej sytuacji zobaczyć istnienie tej symetrii. Po drugie, pozostaje poszukiwanie symetrii w oparciu o macierz Cabibbo-Kobayashiego-Maskawy (CKM). Z eksperymentu wiemy jednak, że pozadiagonalne elementy tej macierzy są bardzo małe i mogą być wynikiem poprawek perturbacyjnych fizyki poza MS, a nie wynikiem istnienia symetrii. Pozostaje więc macierz PMNS, która jest wyraźnie niediagonalna i przy coraz dokładniejszych eksperymentach ma coraz lepiej określone elementy (z dokładnością do faz łamiących symetrię CP, których nie znamy). Stąd będziemy koncentrować się na testowaniu symetrii w oparciu o macierz PMNS. Metoda badawcza w dużej mierze zależy od wyników eksperymentalnych, w szczególności z eksperymentów oscylacji neutrin. Powiązanie sektora neutrinowego z poszukiwaniem globalnej symetrii jest również atrakcyjne dlatego, że jest on pełen otwartych pytań takich

jak rozstrzygnięcie czy neutrino mają naturę Diraca czy Majorany, czy hierarchia mas tych cząstek jest normalna czy odwrócona? Istotnym jest także ustalenie masy najlżejszego neutrino oraz w zależności od natury tych cząstek, wyznaczenie wartości faz (dla neutrin Diraca jednej fazy, a dla neutrin Majorany trzech faz). Odpowiedzi na te pytania będą miały wpływ na kształt macierzy mieszania leptonów, a co za tym idzie mają one związek z postulowaną symetrią.

Celem niniejszej rozprawy jest przeanalizowanie kwestii istnienia możliwych symetrii macierzy PMNS. Nie licząc wstępu i podsumowania rozprawa doktorska składa się z trzech rozdziałów i trzech dodatków. W pierwszym rozdziale opisane są znane z literatury wiadomości wstępne potrzebne w dalszych rozważaniach. Omówione zostało w jaki sposób neutrino opisywane są w MS, czym jest leptonowa macierz mieszania i jak jest parametryzowana. Ważnym elementem tego rozdziału jest ustalenie konwencji i przyjęcie konkretnych definicji wielkości stosowanych w dalszej części pracy. Dodatkowo zaprezentowane zostały bieżące wyniki eksperymentów oscylacyjnych.

W kolejnych dwóch rozdziałach zawarty został opis możliwych symetrii. Podzielone one zostały na dwie grupy: symetrie abelowe i nieabelowe. Symetrie abelowe macierzy masowej leptonów analizowane są w kontekście tak zwanych tekstur zerowych, czyli macierzy masowych neutrin z konkretnymi elementami równymi zero. Rozdział im poświęcony zawiera dyskusję dwóch jakościowo różnych metod rekonstrukcji macierzy masowej neutrin. Prezentowane w tej części pracy wyniki mają charakter autorski. Ostatni rozdział poświęcony jest próbie powiązania relacji pomiędzy elementami macierzy masowej neutrin z nieabelowymi dyskretnymi symetriami rodzinnymi. Wobec braku satysfakcjonujących wyników zarówno własnych jak i literaturowych, część pracy odnosząca się do symetrii nieabelowych ma charakter opisowy. Podany jest tam sposób podejścia do symetrii nieabelowych stosowany w literaturze oraz zasugerowane są możliwe jego rozszerzenia stanowiące dalszy plan badawczy autora.

W dodatkach zawarte są: podstawowe definicje używane w rozprawie, twierdzenia dotyczące diagonalizacji macierzy oraz podstawienia obowiązujące we wzorach wyrażających parametry oscylacyjne macierzy mieszania PMNS przez elementy macierzy masowej neutrin.

## 2 Wprowadzenie

### 2.1 Masa neutrin w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach

Jednym z największych sukcesów fizyki cząstek elementarnych jest opis wszystkich obecnie znanych składników materii wraz z oddziaływaniami występującymi między nimi. Opis ten bazuje na kwantowej teorii pola i jest nazywany Modelem Standardowym cząstek elementarnych. Model ten, od początku jego sformułowania, znalazł potwierdzenie w licznych eksperymentach oraz przyczynił się do powstania jednego z największych eksperymentów w dziejach ludzkości LHC.

Składnikami materii, opisanymi w MS są fermiony, które mają spin połówkowy i opisywane są polami spinorowymi. Wszystkie kwarki oraz naładowane leptony mają naturę cząstek Diraca. Jedynie neutralne neutrina mogą mieć naturę Diraca lub Majorany.

Użyteczne dla tej sekcji pracy definicje znajdują się w Dodatku A.

Spinorami Weyla (oznaczenie:  $\phi, \chi$ ) nazywa się dwukomponentowe obiekty transformujące się względem obrotów i czystych transformacji Lorentza według reguł:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})}\phi, \quad (1)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})}\chi, \quad (2)$$

gdzie  $\vec{\theta}$  określa oś i kąt obrotu,  $\vec{\varphi}$  związany jest z kierunkiem pchnięcia (czyli czystej transformacji Lorentza), natomiast  $\vec{\sigma}$  to wektor macierzy Pauliego. Spinory  $\phi$  to spinory prawe natomiast  $\chi$  lewe.

Wprowadzając macierz:

$$\varepsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Lagranżjany opisujące pola Majorany mają postać odpowiednio dla pola prawego (1):

$$\mathcal{L}_P^M = \frac{i}{2}\phi^\dagger \left( \hat{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right) \phi + \frac{1}{2}m(\phi^T \varepsilon \phi - \phi^\dagger \varepsilon \phi^*), \quad (4)$$

natomiast dla pola lewego (2):

$$\mathcal{L}_L^M = \frac{i}{2}\chi^\dagger \left( \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right) \chi - \frac{1}{2}m(\chi^T \varepsilon \chi - \chi^\dagger \varepsilon \chi^*). \quad (5)$$

Często rozważa się czterekomponentowy obiekt zwany bispinorem Diraca:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Działając na spinor (6) operatorem rzutowym o określonej chiralności (patrz Dodatek (A), wzory od (196) do (204)) dostajemy dwa niezależne bispinory lewy i prawy, odpowiednio:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} , \quad (7)$$

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Zatem, pole Diraca  $\psi$  można zapisać jako kombinację niezależnych spinorów:

$$\psi = \psi_L + \psi_R . \quad (9)$$

Konstrukcja bispinora Diraca wymaga użycia dwóch różnych spinorów Weyla. Bispinor (6) spełnia równania Diraca, które można wyprowadzić ze swobodnego Lagranżjanu:

$$\mathcal{L}^D = \bar{\psi} \left( i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi . \quad (10)$$

Występujący we wzorze tym człon masowy Diraca ma postać:

$$\mathcal{L}^D = -m\bar{\psi}\psi = -m \left( \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R \right) , \quad (11)$$

a w zapisie dwukomponentowym:

$$\mathcal{L}^D = -m \left( \phi^\dagger \chi + \chi^\dagger \phi \right) . \quad (12)$$

Spinor Majorany przez analogię do (9) można zbudować korzystając tylko z jednego pola (7):

$$\psi = \psi_L + \psi_R^c , \quad (13)$$

gdzie, prawe pola  $\psi_R$  wyraża się poprzez pola lewe narzucając na nie tak zwany warunek Majorany (patrz Dodatek (A), wzory od (208) do (216)):

$$\psi_R^c = \mathcal{C}\bar{\psi}_L^T . \quad (14)$$

Oznacza to, że formalnie do konstrukcji bispinora Majorany używa się jednego spinora Weyla.

W podobny sposób możemy skonstruować bispinor Majorany używając pola prawego:

$$\psi = \psi_L^c + \psi_R . \quad (15)$$

Korzystając z relacji (13), człon masowy dla neutrin Majorany ze wzoru (5), w notacji czterokomponentowej można przepisać w postaci:

$$\mathcal{L}^{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}m \left( \bar{\psi}_R^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R^c \right) = -\frac{1}{2}m \bar{\psi} \psi . \quad (16)$$

Zdefiniujmy dwa wektory z obiektów transformujących się według tych samych reprezentacji:

$$\text{prawych: } \begin{pmatrix} \phi \\ \chi_c \end{pmatrix} \text{ oraz lewych: } \begin{pmatrix} \phi_c \\ \chi \end{pmatrix} ,$$

gdzie pola  $\chi_c \equiv -\varepsilon \chi^*$  oraz  $\phi_c \equiv \varepsilon \phi^*$ .

Rozważając Lagranżjany (4) oraz (5) dla pól prawych (1) i lewych (2), ogólny operator, który jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, możemy przedstawić jako:

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} \left( \phi_c^\dagger, \chi^\dagger \right) \begin{bmatrix} m_1 & m_D \\ m_D & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi_c \end{pmatrix} + h.c. \quad (17)$$

Operator (17) nazywamy członem masowym Majorany. Wszystkie wymienione powyżej Lagranżjany opisują człony masowe dla dwóch neutrin.

Aby skonstruować człon w postaci analogicznej do członu (17) ale w ogólnej sytuacji, czyli dla dowolnej ilości pól neutrin i nie zakładający ich charakteru, należy założyć istnienie  $n_L$  stanów:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \psi_R^c = \begin{pmatrix} -\varepsilon \chi^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

oraz  $n_R$  stanów:

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \phi^* \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Konstruujemy z nich  $m$  i  $n$  wymiarowe wektory, odpowiednio:

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \psi_{R1} \\ \psi_{R2} \\ \vdots \\ \psi_{Rm} \end{pmatrix}, \quad \Psi_L^c = \begin{pmatrix} \psi_{L1}^c \\ \psi_{L2}^c \\ \vdots \\ \psi_{Lm}^c \end{pmatrix}, \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{L1} \\ \psi_{L2} \\ \vdots \\ \psi_{Ln} \end{pmatrix}, \quad \Psi_R^c = \begin{pmatrix} \psi_{R1}^c \\ \psi_{R2}^c \\ \vdots \\ \psi_{Rn}^c \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Przy ich użyciu można teraz napisać najogólniejszy człon masowy będący sumą członów masowych Lagranżjanów Diraca (11) i Majorany (16):

$$\mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}^{\mathcal{D}} + \mathcal{L}^{\mathcal{M}}, \quad (21)$$

przyjmujący postać:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{mass} = & -\frac{1}{2} \left( \bar{\Psi}_L, \bar{\Psi}_L^c \right) \begin{bmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R^c \\ \Psi_R \end{pmatrix} + \\ & + \left( \bar{\Psi}_R^c, \bar{\Psi}_R \right) \begin{bmatrix} M_L^\dagger & M_D^* \\ M_D^\dagger & M_R^\dagger \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_L^c \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (22)$$

W zapisie dwukomponentowym można go przepisać jako:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{mass} = & -\frac{1}{2} \left( \chi^\dagger M_L \chi^c + \chi^\dagger M_D \phi + \phi^{c\dagger} M_D^T \chi^c + \phi^{c\dagger} M_R \phi \right) + \\ & + \left( \chi^{c\dagger} M_L^\dagger \chi + \phi^\dagger M_D^\dagger \chi + \chi^{c\dagger} M_D^* \phi^c + \phi^\dagger M_R^\dagger \phi^c \right).\end{aligned}\quad (23)$$

Pomiar skrzyżności w eksperymencie Goldhabera, z końca lat 50-tych ubiegłego wieku, wykazał, że neutrina są cząstkami lewoskrętnymi [1] zatem MS nie zawiera pól prawych dla tych cząstek. Historycznie w MS przyjęto by neutrina traktować jako cząstki bezmasowe.

W chwili obecnej wiemy z eksperymentów, że neutrina posiadają masę (szerza dyskusja w podrozdziale (2.2) oraz (2.3)), zatem MS wymaga rozszerzenia.

Możliwe jego rozszerzenia, w których neutrina opisywane są jako cząstki masowe (modele takie nazywa się ogólnie  $\nu$ SM) można podzielić na dwie grupy. W pierwszej z nich rozpatruje się rozszerzenia bez wprowadzania neutrin prawoskrętnych w drugiej modele, które je zawierają.

## 2.2 Oscylacje neutrin i macierz mieszania leptonów

Pierwszym badaczem, który w analogii do mieszania kaonów  $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$ , próbował doszukać się podobnego fenomenu w sektorze leptonowym był Pontecorvo. W swojej pracy [2] z 1957 roku opisał on możliwość przejścia neutrina elektronowego w swoją antycząstkę. W tym czasie, istnienie antyneutrina elektronowego było faktem zaobserwowanym przez Reinesa i Cowana [3, 4]. Jednocześnie w latach 1957-58 Davis [5] potwierdził, że neutrina nie są tożsame z antyneutrinami. Kolejnym istotnym krokiem było odkrycie w 1962 neutrina mionowego w eksperymencie przeprowadzonym w Brookhaven [6]. Jeżeli neutrina są masywne i podlegają mieszanii to stało się oczywistym, że oscylacje neutrin zapachowych są możliwe. Maki, Nakagawa oraz Sakata w swojej pracy [7] z roku 1962 jako pierwsi opisali model mieszania różnych zapachów neutrin.

Pontecorvo miał swój udział w historii opisu fenomenu oscylacji neutrin jeszcze dwa razy. W roku 1967 przewidział problem deficytu w detekcji neutrin



elektronowych pochodzących ze Słońca (zwany jako problem neutrin słonecznych). Faktycznie w 1968 roku, w eksperymencie w Homestake [8], odnotowano niezgodności zebranych danych eksperymentalnych z przewidywaniami teoretycznymi. Pierwszą próbą wyjaśnienia tego eksperymentu było dopatrywanie się błędów w samym eksperymencie, jednak kolejne eksperymenty wykonywane przez kolaboracje Kamiokande [9], SAGE [10], GALLEX [11] nie pozostawiały złudzeń i potwierdzały wyniki otrzymane w Homestake. Pontecorvo opisał w swoich przewidywaniach deficyt neutrin elektronowych jako konsekwencję przejścia  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ .

W roku 1969 Pontecorvo wspólnie z Gribovem opublikowali pracę [12], w której opisali problem oscylacji neutrin słonecznych przez mieszanie neutrin. Ostateczne potwierdzenie hipotezy oscylacji neutrin miało miejsce w 1998 roku w eksperymencie w Kamiokande [13].

Oscylacje neutrin są efektem czysto kwantowym. Zachodzą one na skutek interferencji różnych stanów masowych neutrin. Neutrino o danym zapachu produkowane są, propagują się i podlegają detekcji jako koherentna superpozycja stanów masowych:

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha j} |\nu_j^m\rangle . \quad (24)$$

Najprostszy, formalnie niepoprawny, ale dający dobry końcowy wynik opis oscylacji neutrin wymaga poczynienia kilku założeń:

- wszystkie stany masowe  $|\nu_j^m\rangle$  składające się na koherentną superpozycję mają tę samą energię  $E$ , ale różne pędy  $p_j$ , wyrażone w przybliżeniu ultrarelatywistycznym jako:

$$p_j = \sqrt{E^2 - m_j^2} \simeq E - \frac{m_j^2}{2E} , \quad (25)$$

- neutrino propagują się w tym samym kierunku,
- czas propagacji jest proporcjonalny do odległości  $L$ .

Niech stan neutrino z określonym zapachem  $|\nu_\alpha\rangle$  w miejscu detekcji ( $L \neq 0$ ) będzie opisany jako:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(L)\rangle &= e^{-i(Ht-PL)} |\nu_\alpha(L=0)\rangle = \sum_{j=1}^3 e^{-i(Et-p_jL)} U_{\alpha j}^* |\nu_j^m\rangle \\ &\simeq e^{-iE(t-L)} \sum_{j=1}^3 e^{-i\frac{m_j^2L}{2E}} U_{\alpha j}^* |\nu_j^m\rangle . \end{aligned} \quad (26)$$

Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $|\nu_\alpha(L=0)\rangle$  do stanu  $|\nu_\beta\rangle$ , wyrażone jest jako kwadrat amplitudy prawdopodobieństwa:

$$P_{\alpha\rightarrow\beta}(L) = |\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(L)\rangle|^2 \simeq \left| \sum_{j=1}^3 e^{-i\frac{m_j^2 L}{2E}} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \right|^2. \quad (27)$$

Istotą występowania superpozycji jest bardzo mała różnica kwadratów mas poszczególnych stanów masowych definiowana jako:

$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2. \quad (28)$$

Nadmienić warto, że pełny, formalnie poprawny opis oscylacji neutrin opiera się na pakietach falowych. Jednak powyższy, skrótowy opis jest wystarczający dla wniosków dalszej części rozprawy.

Macierz  $U_{\alpha j}$  we wzorze (24) jest macierzą diagonalizującą macierz masową neutrin, o której mowa w dalszej części rozdziału (we wzorze (32)). Często utożsamia się ją z macierzą mieszania w leptonowych prądach naładowanych, nazywaną macierzą Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata ( $U_{PMNS}$ ).

Tak będzie zawsze wtedy gdy dla leptonów naładowanych pracujemy w bazie, w której ich macierz masowa jest już diagonalna. Trzeba jednak wziąć pod uwagę fakt, że na symetrię macierzy mieszania wpływa zarówno macierz masowa leptonów naładowanych, jak i macierz masowa neutrin.

Rozważymy Model Standardowy, a następnie jego uogólnienia. Będziemy też zakładać, że neutrina mają naturę Majorany. W modelu tym neutrina oddziałują z leptonami naładowanymi. Oddziaływanie z cząstką Higgsa i w prądach neutralnych z cząstką Z nie jest istotne dla rozważań zawartych w tej pracy.

Tak więc w bazie zapachowej mamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{l}'_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} W_\mu^- + h.c. \\ & + \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left( M_{\alpha,\beta}^l \bar{l}'_{\alpha R} l'_{\beta L} + M_{\alpha,\beta}^{l*} \bar{l}'_{\beta L} l'_{\alpha R} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left( M_{\alpha,\beta}^\nu \bar{\nu}_{\alpha R}^C \nu_{\beta L} + M_{\alpha,\beta}^{\nu*} \bar{\nu}_{\beta L} \nu_{\alpha R}^C \right), \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie:

$$\nu_{\alpha R}^C = i\gamma^2 \nu_{\alpha L}^*. \quad (30)$$

Macierz masowa leptonów naładowanych  $M_{\alpha,\beta}^l$  jest dowolną, trójwymiarową macierzą zespoloną, zaś dla neutrin  $M_{\alpha,\beta}^\nu$  jest dowolną symetryczną macierzą

zespoloną. W rozszerzeniach MS macierz  $M^\nu$  może mieć wymiar  $N > 3$ . Macierz  $M_{\alpha\beta}^l$  jest diagonalizowana przez transformację biunitarną (patrz Dodatek B - dowód Twierdzenia (1)):

$$\left(U_L^{l\dagger} M^l U_R^l\right)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} m_\alpha^l, \quad m_\alpha^l > 0. \quad (31)$$

Macierz masowa neutrin  $M_{\alpha\beta}^\nu$  diagonalizowana jest transformacją ortogonalną z macierzą zespoloną (patrz Dodatek B - dowód Twierdzenia (2)):

$$\left(U^{\nu\dagger} M^\nu U^{\nu*}\right)_{ij} = \delta_{ik} m_i^\nu, \quad m_i^\nu \geq 0. \quad (32)$$

Wprowadziliśmy więc nową bazę - bazę fizyczną dla macierzy masowych w których stają się one diagonalne:

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{i=1,2,3} U_{\alpha i}^\nu \nu_{iL} \quad \Rightarrow \quad \nu_{\alpha R} = \sum_{i=1,2,3} U_{\alpha i}^{*\nu} \nu_{iR}, \quad (33)$$

a także:

$$l'_{\alpha L} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(U_L^l\right)_{\alpha\beta} l_{\beta L} \quad \text{oraz} \quad l'_{\alpha R} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(U_R^l\right)_{\alpha\beta} l_{\beta R}. \quad (34)$$

Po takiej transformacji w oddziaływaniach prądów naładowanych pojawi się macierz mieszania:

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_{\substack{\alpha=e,\mu,\tau \\ i=1,2,3}} \bar{l}_{\alpha L} \gamma^\mu (U_{PMNS})_{\alpha i} \nu_{iL} W_\mu^- + h.c. , \quad (35)$$

gdzie:

$$(U_{PMNS})_{\alpha i} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(U_L^l\right)_{\alpha\beta}^\dagger (U^\nu)_{\beta i}, \quad (36)$$

jest macierzą mieszania noszącą nazwę Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakaty. W MS macierz  $U_{PMNS}$  pojawia się tylko w oddziaływaniach prądów naładowanych (35). W oddziaływaniach prądów neutralnych neutrina oddziałują z cząstkami  $Z_0$  i cząstkami Higgsa zachowując zapach, np.

$$\mathcal{L}_{NC} \sim \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} Z_\mu \sim \sum_{i=1,2,3} \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} Z_\mu , \quad (37)$$

co powoduje, że po przejściu do stanów fizycznych macierz mieszania nie pojawia się. Sytuacja zmienia się w różnych rozszerzeniach MS, gdy na przykład pojawiają się oddziaływania neutrin prawoskrętnych [14], albo prądy neutralne łamiące symetrię zapachową:

$$\mathcal{L}_{CC} \sim \sum_{\alpha} \bar{l}_{\alpha R} \gamma^\mu \nu_{\alpha R} W_\mu^+, \quad (38)$$

$$\mathcal{L}_{NC} \sim \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\beta L} Z_\mu, \quad (39)$$

wtedy w bazie fizycznej:

$$\mathcal{L}_{CC} \sim \sum_{\alpha i} \bar{l}_{\alpha R} \gamma^\mu \nu_{iR} (U_R)_{\alpha i} W_\mu^+, \quad (40)$$

gdzie:

$$(U_R)_{\alpha i} = \left( U_R^{l\dagger} U^{\nu*} \right)_{\alpha i}, \quad (41)$$

oraz:

$$\mathcal{L}_{NC} \sim \sum_{ij} \bar{\nu}_{iL} \gamma_\mu \Omega_{ij}^\mu \nu_{jL} Z_\mu, \quad (42)$$

gdzie:

$$\Omega_{ij}^\mu = \sum_{\alpha\beta} \left( U^{\nu\dagger} \right)_{i\alpha} g_{\alpha\beta} (U^\nu)_{\beta j}. \quad (43)$$

Widać, że w takich uogólnionych modelach więcej wielkości mogłoby podlegać pomiarowi, np. elementy macierzy  $U_R$  oraz  $\Omega$ . Nie mamy jednak w chwili obecnej żadnych informacji eksperymentalnych o takich dodatkowych oddziaływaniach. Model Standardowy poszerzony jedynie o człon mas neutrin dobrze tłumaczy obecne wyniki doświadczeń.

Skoncentrujemy się na sytuacji, w której wszystkie symetrie teorii tkwiące w postaciach macierzy masowych dla trzech naładowanych leptonów  $M^l$  i  $3+n$  neutrin  $M^\nu$  (gdzie  $n = 1, 2, 3$  oznaczają dodatkowe ciężkie neutrino sterylne) pojawiają się tylko przez masy i mierzone parametry macierzy  $U$  w prądzie naładowanym. Tak więc jedynie macierz masową  $3 \times 3$  dla neutrin możemy zrekonstruować w oparciu o obecne wyniki doświadczalne.

Trzeba pamiętać o tym, że macierz mieszania w prądzie naładowanym jest wyrażona w bazie masowych stanów własnych (36) zarówno naładowanych leptonów ( $e, \mu, \tau$ ) jak i neutrin ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ). Z tego powodu mamy dowolność w wyborze modeli teoretycznych. Możemy szukać symetrii:

(i) w bazie stanów własnych naładowanych leptonów, wtedy:

$$U_L^l = I \quad \text{ i } \quad U_{PMNS} = U_L = U^\nu, \quad (44)$$

(ii) w bazie stanów masowych stanów własnych neutrin, wtedy:

$$U^\nu = I \quad \text{ i } \quad U_{PMNS} = U_L^{l\dagger}, \quad (45)$$

(iii) albo w bazie, gdzie zarówno  $U_L^\nu \neq 0$  jak i  $U^\nu \neq 0$ , wtedy:

$$U = U_L^{l\dagger} U^\nu. \quad (46)$$

Wszystkie przypadki można znaleźć w literaturze najczęściej jednak wybieramy bazę (44).

W dalszej części pracy omówiona zostanie kwestia wpływu wyboru bazy na przyjętą globalną symetrię.

W bazie (44), w której macierz masowa leptonów naładowanych jest diagonalna, transformację (32) prowadzącą do diagonalizacji macierzy masowej neutrin, można po wprowadzeniu zapisu:

$$U_{PMNS} = U^\nu \equiv U , \quad (47)$$

przepisać jako:

$$U^T M_\nu U = m_{diag} . \quad (48)$$

Rozpatrzmy chwilowo sytuację ogólną i załóżmy, że macierz  $U$  i macierze masowe mają wymiar  $N \times N$ .

Unitarna macierz  $U$  o wymiarze  $N$ , zależy od  $\frac{N^2-N}{2}$  modułów oraz  $\frac{N^2+N}{2}$  faz. Jeżeli do tego dodamy  $N$  rzeczywistych elementów diagonalnej macierzy  $m_{diag}$ , otrzymamy taką liczbę parametrów jak w symetrycznej macierzy  $N$  wymiarowej:

$$N + \frac{N^2 - N}{2} + \frac{N^2 + N}{2} = N(N + 1), \quad (49)$$

a więc równa liczbie parametrów w neutrinowej macierzy masowej.

Nie wszystkie fazy macierzy  $U$  są dającymi się zmierzyć parametrami fizycznymi. Macierz  $U$  będziemy parametryzować w sposób:

$$U = f_{NF} \cdot U_D \cdot f_M . \quad (50)$$

Macierz  $f_{NF}$ :

$$\begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\beta_N} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

jest diagonalną macierzą  $N$  niefizycznych faz, które w oddziaływaniu prądów naładowanych można wyeliminować.

Macierz  $U_D$  jest unitarną macierzą zawierającą tylko:  $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$  faz i wszystkie  $\frac{N^2-N}{2}$  moduły. Taka macierz opisuje mieszanie leptonów, gdy neutrina są cząstkami Diraca.

Macierz  $f_M$  jest diagonalną macierzą  $N - 1$  faz Majorany, którą będziemy parametryzować w sposób:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{(i\alpha_1)/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{(i\alpha_2)/2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{(i\alpha_{N-1})/2} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Macierz  $U_D$  skonstruowana jest z macierzy obrotów we wszystkich możliwych płaszczyznach o odpowiednio dołączonych  $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$  fazach.

Dla macierzy  $3 \times 3$  mamy:

$$U_D(3 \times 3) \equiv R_{23}^{(3)}(\theta_{23}, 0) R_{13}^{(3)}(\theta_{13}, \delta_{13}) R_{12}^{(3)}(\theta_{12}, 0), \quad (53)$$

gdzie,  $\delta_{13} \equiv \delta$  jest fizyczną fazą zmieniającą się w zakresie  $0 \leq \delta \leq 360^\circ$ . Nazywana jest ona fazą Diraca. Jest ona związana z łamaniem symetrii CP, analogicznie do fazy pojawiającej się w macierzy mieszania kwarków ( $U_{CKM}$ ). Trzeba zaznaczyć, że w dotychczasowych eksperymentach z udziałem neutrin, fazy Majorany mogą zostać wyeliminowane. Chociaż więc formalnie macierz  $U_{PMNS}$  zawiera fazy Majorany (co będzie istotne na przykład w podwójnym bezneutrinowym rozpadzie  $\beta$ ), w eksperymentach oscylacyjnych fazy te nie są mierzone i macierz mieszania przyjmuje się tak jak w (53).

Wprowadzając konwencję dotyczącą oznaczeń kątów mieszania  $\theta_{ij}$ :

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij}, \quad s_{ij} = \sin \theta_{ij}, \quad (54)$$

macierze obrotów zapisujemy jako:

$$R_{23}^{(3)}(\theta_{23}, 0) \Rightarrow U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$R_{13}^{(3)}(\theta_{13}, \delta_{13}) \Rightarrow U_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$R_{12}^{(3)}(\theta_{12}, 0) \Rightarrow U_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Zatem w postaci jawnej macierz  $U_D$  możemy zaprezentować jako:

$$U_D = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Przyjmuje się [15], że kąty mieszania  $\theta_{ij}$  zmieniają się w zakresie:  $0 \leq \theta_{ij} \leq 90^\circ$ .

Podsumowując: w przypadku trzech neutrin mamy dziewięć parametrów fizycznych. Trzy masy neutrin, trzy kąty mieszania oraz trzy fazy  $\delta, \alpha_1/2, \alpha_2/2$ . Dwie z tych faz ( $\alpha_1/2, \alpha_2/2$ ) nazywane są fazami Majorany. Jeśli neutrina mają naturę Diraca, to fazy te mogą być zaabsorbowane poprzez wciągnięcie ich w definicję pól neutrin.

### 2.3 Doświadczalne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin

Numeracja stanów masowych neutrin nie jest przyjęta arbitralnie. W pracy tej przyjmuje się konwencję:

$$m_1 < m_2 \quad (\Delta m_{21}^2 > 0), \quad \Delta m_{21}^2 < |\Delta m_{31}^2|. \quad (59)$$

W konwencji tej, przy założeniu istnienia trzech aktywnych neutrin, istnieją dwie możliwości (hierarchia normalna i odwrotna) wyznaczenia spektrum masy neutrin w zależności od znaku  $\Delta m_{31}^2$  (28):

- Hierarchia normalna :  $m_1 < m_2 < m_3$ .
- Hierarchia odwrotna:  $m_3 < m_1 < m_2$ .

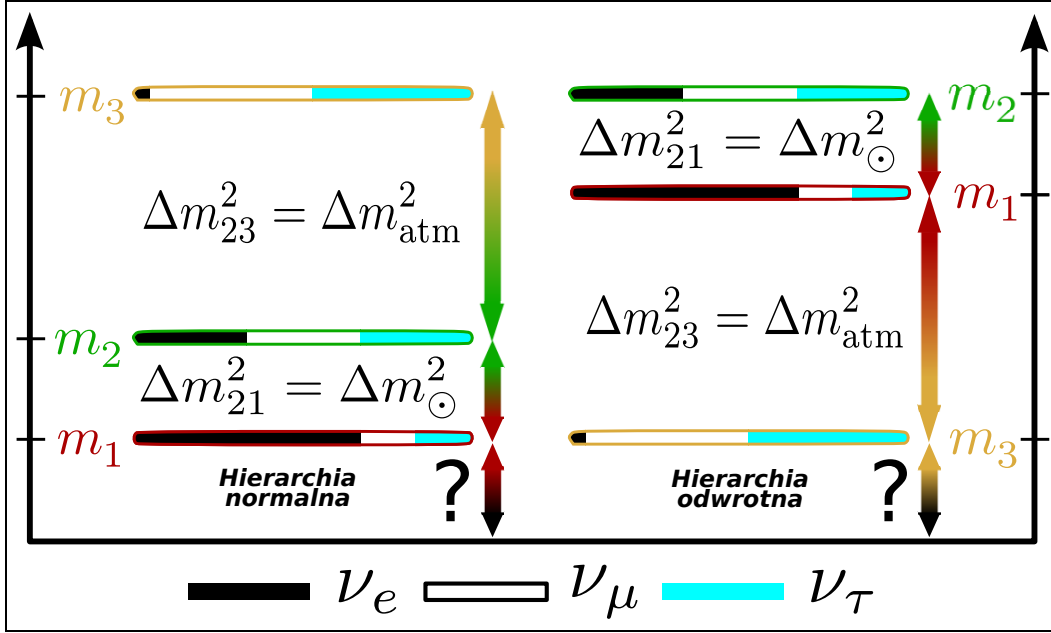
Najmniejsza różnica kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2$  jest związana z oscylacjami tak zwanych neutrin słonecznych i jest oznaczana jako  $\Delta m_\odot^2$ . Większa różnica kwadratów mas jest związana z tak zwanymi neutrinami atmosferycznymi i jest oznaczana jako  $\Delta m_{\text{atm}}^2$ .

Dla hierarchii normalnej:  $\Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{31}^2$ , natomiast dla hierarchii odwrotnej:  $\Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{23}^2$ .

Jednymi z najważniejszych zrealizowanych lub wciąż trwających eksperymentów oscylacyjnych są m.in: K2K [16], T2K [17], KamLAND [18], MINOS [19], OPERA [20], MiniBooNE [21], SAGE [22], Superkamiokande [23], SNO [24, 25], Amanda/IceCube [26], Borexino [27], DayaBay [28]. W Tabeli 2 zebrano opracowane przez różne grupy podsumowanie aktualnych wyników eksperymentów oscylacyjnych.

W eksperymentach oscylacyjnych mierzy się różnice kwadratów mas (28). Eksperymenty, w których można potencjalnie mierzyć masę neutrin (np. rozpad  $\beta$  trytu) mają niewystarczającą dokładność i istnieją jedynie górne ograniczenia na ich masę.

Historycznie, liczne pomiary przekrojów czynnych na procesy z udziałem neutrin wykazywały bardzo dużą zgodność z koncepcją bezmasowych



Rysunek 1: Hierarchia normalna i odwrotna.

neutrino. Ponadto, silnym wskazaniem na ich bezmasowość był eksperyment przeprowadzony w 1958 r. przez Goldhabera i jego grupę [1], gdzie dokonano pomiaru skrętności neutrino (o którym wspomniano w podrozdziale (2.1)). Wyniki tego eksperymentu wykazały, iż neutrino są cząstkami lewoskrętnymi, co bardzo dobrze zgadzało się z dwukomponentowym opisem bezmasowych neutrino w MS. Mimo dużej zgodności eksperymentalnej, Pauli jako pierwszy rozważał neutrino będące cząstkami z bardzo małą masą (dużo mniejszą od masy elektronu) [32]. Wskazano nawet eksperymentalną metodę pomiaru masy neutrino ze spektrum rozpadu  $\beta$ , którą zaproponowali Fermi oraz Perin [33, 34, 35]. Pierwsze pomiary ograniczyły masę neutrino do  $m_\nu \lesssim 250$  eV [36]. Obecnie ograniczenie to wynosi  $m_\nu \lesssim 2$  eV [15]. Uzyskano je w eksperymentach rozpadu  $\beta$  trytu (na poziomie 95 % C.L.) przeprowadzonych w Mainz [37] oraz w Troitsku [38], gdzie dla "średniej" masy neutrino:

$$m_\beta = \sqrt{\sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2}, \quad (60)$$

oszacowano odpowiednio:

$$m_\beta \leq 2.3 \text{ eV (Mainz)}, \quad m_\beta \leq 2.1 \text{ eV (Troitsk)}. \quad (61)$$

Otrzymane wyniki nie wykluczają hipotezy o niezerowej masie neutrino. Potwierdzają jednak fakt, że masy te są o wiele mniejsze od mas naładowanych



Parametr	Forero i wsp.	Fogli i wsp.	Gonzalez-Garcia i wsp.
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	$7.62 \pm 0.19$	$7.54^{+0.26}_{-0.22}$	$7.50 \pm 0.185$
$\Delta m_{31}^2 [10^{-3} \text{eV}^2]$	$2.55^{+0.06}_{-0.09}$ $-2.43^{+0.06}_{-0.07}$	$2.43^{+0.06}_{-0.10}$ $-2.42^{+0.11}_{-0.07}$	$2.47^{+0.069}_{-0.067}$ $-2.43^{+0.042}_{-0.065}$
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.320^{+0.016}_{-0.017}$	$0.307^{+0.018}_{-0.016}$	$0.30 \pm 0.013$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.427^{+0.034}_{-0.027}$ & $0.613^{+0.022}_{-0.040}$ $0.600^{+0.026}_{-0.031}$	$0.386^{+0.024}_{-0.021}$ $0.392^{+0.039}_{-0.022}$	$0.41^{+0.037}_{-0.025}$ $0.41^{+0.037}_{-0.025}$ & $0.59^{+0.021}_{-0.022}$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.0246^{+0.0029}_{-0.0028}$ $0.0250^{+0.0026}_{-0.0027}$	$0.0241 \pm 0.0025$ $0.0244^{+0.0023}_{-0.0025}$	$0.023 \pm 0.0023$
$\delta$	$(0.80 \pm 1)\pi$ $-(0.03 \pm 1)\pi$	$(1.08^{+0.28}_{-0.31})\pi$ $(1.09^{+0.38}_{-0.26})\pi$	$(1.67^{+0.37}_{-0.77})\pi$

Tabela 2: Podsumowanie parametrów oscylacyjnych dla neutrin. Dla  $\Delta m_{31}^2$ ,  $\sin^2 \theta_{23}$ ,  $\sin^2 \theta_{13}$ , i  $\delta$  górne (dolne) wartości odpowiadają hierarchii normalnej (odwróconej). W tabeli podane są wartości średnie oraz błędy na poziomie  $1\sigma$  opracowane przez trzy niezależne grupy. Wyniki pochodzą z prac: [29] (Forero i wsp.), [30] (Fogli i wsp.), [31] (Gonzalez-Garcia i wsp.).

leptonów i kwarków.

Ważną grupą eksperymentów są te związane z procesem podwójnego rozpadu  $\beta$ .

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e, \quad (2\nu\beta\beta). \quad (62)$$

Historycznie proces ten został zaproponowany przez Goeppert-Mayer [39]. Można go obserwować jako jednoczesny rozpad dwóch neutronów. Wkrótce po ukazaniu się prac Majorany, Recah [40] i Furry [41] przedyskutowali inny rozpad, możliwy tylko i wyłącznie wtedy, gdy zgodnie z hipotezą neutrina i antyneutrina są tożsame:

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^-, \quad (0\nu\beta\beta). \quad (63)$$

Jest on zwany podwójnym bezneutrinowym rozpadem  $\beta$ . Eksperymentalne potwierdzenie zajścia takiego rozpadu dałoby jednoznaczną i bezpośrednią odpowiedź co do natury neutrin. Jakkolwiek liczne eksperymenty nie dowodzą istnienia tego rozpadu [42], to jednak dają one ograniczenia na masę neutrin. Zawarte są one w Tabeli 3.

Eksperyment	$ m_{\beta\beta}  \lesssim$
Heidelberg-Moscow [43]	$(0.22 - 0.64) \text{ eV}$
NEMO3 [44, 45]	$(0.44 - 1.00) \text{ eV}$

Tabela 3: *Ograniczenia na masę z bezneutrinowego podwójnego rozpadu  $\beta$ .*

Parametr  $m_{\beta\beta}$  z Tabeli 3 jest efektywną masą neutrina Majorany definowaną jako:

$$|m_{\beta\beta}| = \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right|. \quad (64)$$

Planowane przyszłe eksperymenty to między innymi GERDA [46], CUORE [47], KamLAND-Zen [48], EXO [49], które powinny znacząco poprawić obecne ograniczenia do:  $|m_{\beta\beta}| \lesssim 10^{-2} \text{ eV}$ .

Obowiązujące ograniczenia na ilość aktywnych neutrin pochodzą z wyników eksperymentu LEP [50]. Są one związane z tak zwaną szerokością połówkową rozpadu cząstki  $Z^0$ . Doświadczenie to wykazało, że istnieją tylko trzy generacje neutrin o masie mniejsze niż  $\frac{M_Z}{2}$ , gdzie  $M_Z$  jest masą cząstki  $Z_0$ .

## 2.4 Analityczne wyznaczenie masy i elementów macierzy mieszania neutrin

W tej części pracy zaprezentowana jest metoda uzyskania jednoznacznych, analitycznych wzorów, wyrażających parametry oscylacyjne macierzy mieszania  $U_{PMNS}$ , poprzez elementy macierzy masowej neutrin.

Podrozdział ten jest wynikiem własnym, opartym w całości na opublikowanej pracy [51].

Zakładamy, trzy generacje neutrin o naturze Majorany. Przy założeniu tym, macierz masowa neutrin, oznaczana jako  $\mathcal{M}_\nu$ , jest w ogólności symetryczną macierzą trójwymiarową o elementach zespolonych. Konstruujemy z niej hermitowską macierz  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{M}_\nu^\dagger \mathcal{M}_\nu. \quad (65)$$

W jawnej postaci, macierz (65) można zapisać jako:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & Be^{i\phi_1} & Ce^{i\phi_2} \\ Be^{-i\phi_1} & D & Ee^{i\phi_3} \\ Ce^{-i\phi_2} & Ee^{-i\phi_3} & F \end{pmatrix}, \quad (66)$$

w której parametry  $(A, B, \dots, \phi_1, \phi_2, \dots)$  mogą być w prosty sposób wyznaczone przez elementy macierzy  $\mathcal{M}_\nu$ .

Macierz ta jest diagonalizowana poprzez unitarną transformację:

$$\mathcal{W}^\dagger \mathcal{H} \mathcal{W} = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

gdzie unitarna macierz  $\mathcal{W}$ , jest zbudowana z wektorów własnych  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix}, \quad (68)$$

a wartości własne  $m_i^2$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) odpowiadają kwadratam mas. Z własności macierzy (65) wynika, że wartości te są rzeczywiste i nieujemne. Jest to pożądana własność, ze względu na to, że w eksperymentach mierzy się różnice kwadratów mas neutrin (patrz podrozdział (2.3)).

Faza wektorów własnych macierzy (68) nie zmienia wartości własnych (67). Zatem, możemy użyć tych faz tak by znaleźć macierz  $\mathcal{U}$ , diagonalizującą macierz masową neutrin  $\mathcal{M}_\nu$  tak jak w równaniu (48) z rzeczywistymi dodatnimi wartościami własnymi  $m_i$ .

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\chi_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Nowe fazy  $\chi_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) również zależą od elementów macierzy  $\mathcal{M}_\nu$ .

Macierz (69) zależy od 9 parametrów, co bezpośrednio koresponduje z ilością parametrów macierzy  $U$  (50) w standardowej parametryzacji. Porównując elementy macierzy (50) i (69) możemy znaleźć relacje pomiędzy kątami mieszania a elementami macierzy masowej neutrin:

$$\sin \theta_{13} = |x_3|, \quad \cos \theta_{13} = \sqrt{1 - |x_3|^2}, \quad (70)$$

$$\sin \theta_{23} = \frac{|y_3|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}, \quad \cos \theta_{23} = \frac{|z_3|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}, \quad (71)$$

$$\sin \theta_{12} = \frac{|x_2|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}, \quad \cos \theta_{12} = \frac{|x_1|}{\sqrt{1 - |x_3|^2}}. \quad (72)$$

Analogicznie możemy wyrazić fizyczne fazy Majorany ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) oraz fazę Diraca  $\delta$  poprzez elementy macierzy masowej:

$$\frac{\alpha_1}{2} = \omega_2 - \omega_1, \quad (73)$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = \omega_3 + \delta - \omega_1, \quad (74)$$

$$e^{-i\delta} = \frac{|x_1||x_3||z_3| + |z_1|e^{i(\tau_1+\omega_3-\tau_3-\omega_1)}}{1 - |x_3|^2}. \quad (75)$$

I podobnie dla faz niefizycznych ( $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$\beta_1 = \chi_1 + \omega_1, \quad (76)$$

$$\beta_2 = \chi_2 + \eta_3 - \omega_2 + \omega_1, \quad (77)$$

$$\beta_3 = \chi_3 - \delta - \omega_3 + \tau_3 + \omega_1, \quad (78)$$

gdzie:  $\omega_i = \text{Arg}(x_i)$ ,  $\eta_i = \text{Arg}(y_i)$ ,  $\tau_i = \text{Arg}(z_i)$  i  $\omega_1, \tau_3 = 0 \vee \pi$ .

Podstawienia obowiązujące we wzorach od (70) do (78) zawarte są w Dodatku C.

## 2.5 Wzorce symetrii macierzy mieszania

Można przyjąć hipotezę zakładającą, że kształt macierzy  $U_{PMNS}$  nie jest przypadkowy. Szczególnie atrakcyjną i szeroko dyskutowaną w ostatnich latach jest koncepcja istnienia rodzinnej dyskretnej grupy symetrii, która tłumaczy postać macierzy mieszania leptonów.

Przed rokiem 2012 dane pochodzące z eksperymentów neutrinowych zgadzały się z tak zwaną „trzy podwójnie maksymalną” (tribimaximal - TBM) macierzą mieszania, w literaturze znaną pod nazwą  $U_{TBM}$ . Zaproponowana została ona w 2002 roku przez Harisona, Perkinsa i Scotta [52]:

$$U_{TBM} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Trzecia kolumna tej macierzy odpowiada maksymalnemu mieszanemu stanów  $|\nu_\mu\rangle$  i  $|\nu_\tau\rangle$ :

$$|U_{\mu 3}| = |U_{\tau 3}| = 1/\sqrt{2}, \quad (80)$$

odpowiada to kątowi:

$$\sin \theta_{23} \approx 1/\sqrt{2} \Rightarrow \theta_{23} \approx \pi/4 \text{ czyli } 45^\circ. \quad (81)$$

Druga kolumna odpowiada za równe mieszanie trzech stanów  $|\nu_e\rangle$ ,  $|\nu_\mu\rangle$  i  $|\nu_\tau\rangle$ :

$$|U_{e2}| = |U_{\mu 2}| = |U_{\tau 2}| = 1/\sqrt{3}. \quad (82)$$

Koresponduje to z kątem  $\theta_{12} \approx 35^\circ$ .

Warto zauważyć, że dla:

$$U_{e3} = 0 , \quad (83)$$

kąt mieszania  $\theta_{13}$  jest równy 0 i macierz  $U_{PMNS}$  jest rzeczywista. Do roku 2012 wartość ta znajdowała potwierdzenie w danych wynikających z eksperymentów oscylacyjnych.

Kształt macierzy (79) może sugerować istnienie związku ze współczynnikami Clebscha-Gordona pewnej grupy symetrii. Obserwacja ta wywołała szeroki odzew wśród grup teoretycznych. Pojawiło się wiele modeli, które fenomenologicznie wyjaśniały pochodzenie wzorca TBM. Jedną z pierwszych propozycji, wysuniętą w 2004 roku w pracy [53], była hipoteza wiążąca macierz  $U_{TBM}$  z dyskretną grupą symetrii  $A_4$ . Jej pełne uzasadnienie ukazało się w roku 2005 [54, 55, 56, 57].

W przeciągu niemal dekady pojawiło się wiele innych propozycji próbujących z mniejszym lub większym powodzeniem związać macierz  $U_{TBM}$  z innymi dyskretnymi grupami symetrii lub jej wariacjami, takimi jak na przykład:  $U(1)^3 \times Z_2^3 \rtimes S_3$  [58],  $Z_2^3 \rtimes S_3$  [59],  $S_4$  [60, 61],  $T'$  [62, 63],  $\Delta(27)$  [64],  $\Delta(54)$  [65].

W roku 2012 pojawiły się nowe, dokładniejsze dane z eksperymentów mierzących kąt  $\theta_{13}$ . Okazało się, że kąt ten jest różny od zerowego. Obecnie mierzone wartości kąta  $\theta_{13}$  zaprezentowane są w Tabeli 4. Dane te wykluczy-

Eksperyment	$\sin^2 2\theta_{13}$
T2K	$0.140^{+0.038}_{-0.032}, 0.170^{+0.045}_{-0.037}$
DayBay	$0.090^{+0.008}_{-0.009}$
Minos	$0.095^{+0.035}_{-0.036}$
RENO	$0.100^{+0.025}_{-0.025}$

Tabela 4: *Pomiary „reaktorowego” kąta mieszania  $\sin^2 2\theta_{13}$  pochodzące z eksperymentów T2K[17], Daya Bay [28], MINOS[19], oraz RENO [66]. W przypadku eksperymentu T2K pierwsza wartość odpowiada normalnej hierarchii, a druga odwróconej.*

ły możliwość realizacji schematu TBM. W ich świetle powróciło pytanie o to, czy jakaś nowa symetria stoi za kształtem macierzy mieszania. Duża wartość kąta  $\theta_{13}$  może wykluczać te z propozycji, które upatrują rozwiązania w perturbacji schematu TBM. Spośród wielu ogólnych koncepcji próbujących wyjaśnić naturę mieszania w sektorze leptonowym w pracy tej przeanalizowane zostaną dwie.

Po pierwsze, wydaje się atrakcyjnym ponowne przeanalizowanie modeli z tak zwanymi teksturami zerowymi [67, 68, 69] macierzy masowej neutrin. Wiązane one są z symetriami abelowymi. Macierz mieszania leptonów związana jest, co zostało przedyskutowane we wprowadzeniu niniejszej rozprawy (patrz wzór (48)), z macierzą masową neutrin. Zatem, symetria macierzy masowej neutrin indukuje symetrię macierzy mieszania. Tekstury zerowe macierzy masowej przedyskutowane zostaną w rozdziale 3 niniejszej pracy.

Po drugie, w ramach obecnych danych eksperymentalnych (Tabela 2) poszukiwana jest symetria nieabelowa dająca pożądane relacje pomiędzy elementami macierzy masowej  $\mathcal{M}_\nu$ . Dyskusja takowa przeprowadzona jest w rozdziale 4 rozprawy.

### 3 Symetrie abelowe macierzy masowej leptonów z teksturami zerowymi

W literaturze przeanalizowanych zostało wiele interesujących propozycji ograniczenia kształtu macierzy masowej neutrin, a co za tym idzie ilości wolnych parametrów MS. Spośród wielu propozycji wymienić przykładowo można: tekstury zerowe [70, 71, 72, 73], modele zakładające znikanie minorów macierzy masowej [74, 75, 76], albo tak zwane tekstury hybrydowe [77, 78, 79, 80]. Szczególnie intensywnie studiowane są te pierwsze.

Poprzez tekstury zerowe macierzy masowej neutrin, rozumie się takie ich wzorce, które zakładają zerowe, lub bliskie zeru konkretne jej elementy. Za takimi postaciami macierzy masowej mogą się kryć symetrie rodzinne.

Zauważono na przykład [81], że zera macierzy masowej neutrin Diraca ( $M_D$ ) i macierzy masowej ciężkich prawoskrętnych neutrin Majorany, ( $M_R$ ) mogą reprodukować się jako zera w niskoenergetycznej efektywnej macierzy masowej neutrin, poprzez tak zwany mechanizm „huśtawki” („seesaw”) [82, 83, 84]. W modelach „seesaw” masę lekkich neutrin, w dobrym przybliżeniu, dostaje się poprzez diagonalizację macierzy masowej w postaci:

$$M_\nu = M_D M_R^{-1} M_D^T . \quad (84)$$

W ogólności tekstury zerowe macierzy masowej neutrin można otrzymać jako realizację abelowych symetrii rodzinnych przy założeniu rozszerzonego sektora skalarnego Modelu Standardowego [85].

Problem rekonstrukcji macierzy masowej neutrin można od strony metodologicznej podzielić na dwie kategorie. Funkcjonują one pod nazwami „top-down” i „bottom-up”.

W pierwszym podejściu - „top-down”, postać macierzy masowej (jej tekstura, symetrie, etc.) jest założeniem wynikającym z przyjętego modelu a co za tym idzie możliwych globalnych symetrii. Wszystkie parametry takie jak: masy neutrin, kąty mieszania i fazy, uzyskuje się z założonej macierzy masowej neutrin. Sposób ich otrzymania przedstawiony jest w poprzednim rozdziale. Weryfikacją przyjętego modelu jest zgodność uzyskanych wyników z danymi eksperymentalnymi.

W podejściu „bottom-up”, w ramach obowiązujących ograniczeń eksperymentalnych dla obserwabli (kąty mieszania, różnic kwadratów mas), poszukuje się dozwolonych tekstur macierzy masowej neutrin. Najczęściej testuje się te modele przy użyciu metod numerycznych.

Niniejszy rozdział poświęcony jest dyskusji jednej i drugiej metody. Omówione zostaną nasze wyniki, poszukiwania symetrii, uzyskane przy zastosowaniu obu metod.

### 3.1 Przykład realizacji symetrii abelowej dla tekstury z dwoma zerami

Uniwersalny przepis dotyczący realizacji symetrii dla tekstur zerowych zarówno dla kwarkowych, jak i leptonowych macierzy masowych można znaleźć w pracy [86]. Istnienie zer w fermionowych macierzach masowych jest konsekwencją wynikającą z wprowadzenia abelowych symetrii rodzinnych. Szczególną podgrupą są wzorce z dwoma elementami macierzy masowej równymi zero. Są one istotne, ponieważ dobrze opisują zarówno sektor kwarkowy jak i leptonowy. Dla leptonów dają informacje o ich masach i macierzy mieszania. Wzorce z dwoma zerami są ważne również dlatego, że są zgodne z niektórymi specyficznymi realizacjami modeli Wielkiej Unifikacji [87].

Na długo przed „rewolucją” związaną z pomiarem niezerowego kąta  $\theta_{13}$  istniało fenomenologiczne ograniczenie na ilość dozwolonych realizacji możliwych tekstur z dwoma zerami [70]. Dla  $n$  niezależnych, równych zero parametrów macierzy masowej istnieje:

$$k = \frac{6!}{n!(6-n)!} , \quad (85)$$

kombinacji możliwych tekstur zerowych. Spośród wszystkich 15 kombinacji dwóch zerowych parametrów macierzy masowej neutrin realizowanych było tylko 7. Zaprezentowane są one w Tabeli 5. Terminologia dotycząca nazw poszczególnych tekstur zerowych, używana w dalszej części rozprawy, zgodna jest z nazewnictwem przyjętym w pracy [70]. Obecnie jednak, nowe dane

$A1$	$A2$	$B1$	$B2$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ X & X & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & 0 \\ X & 0 & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & 0 & X \\ 0 & X & X \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$
$B3$	$B4$	$C$	-
$\begin{pmatrix} X & 0 & X \\ 0 & 0 & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & 0 \\ X & X & X \\ 0 & X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & 0 & X \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$	-

Tabela 5: *Siedem dozwolonych tekstur z dwoma zerami, o których mowa jest w pracy [70].*

doświadczalne ograniczyły liczbę możliwych tekstur zerowych. Taka analiza przeprowadzona jest w podrozdziale 3.2. Dwie, spośród siedmiu wyżej wymienionych klas, tekstur z dwoma zerami macierzy masowej neutrin, można



uzyskać [88] z grupy  $A_4$ , lub jej cyklicznej podgrupy  $Z_3$  w powiązaniu z modelem „seesaw” (typ I+II) [15]. Realizację symetrii dla modelu „seesaw” II-go typu dla wszystkich dozwolonych wzorców z dwoma zerami prezentuje praca [89].

Poniżej zamieszczony jest przykład [90] użycia cyklicznej symetrii  $Z_3$  do odtworzenia tekstury  $A_1$  zakładając, że macierz masowa powstaje poprzez działanie mechanizmu „seesaw” I i II typu (podobnie jak w teoriach wielkiej unifikacji). W takim przypadku, relacja (84) przechodzi w:

$$M_\nu = M_L - M_D M_R^{-1} M_D^T, \quad (86)$$

gdzie  $M_L$  opisuje masę Majorany dla pól lewoskrętnych.

Niech pola leptonowe transformują się zgodnie z:

$$\begin{aligned} D_{L_e} &\rightarrow \omega^2 D_{L_e}, & e_R &\rightarrow \omega^2 e_R, & \nu_{R_1} &\rightarrow \omega \nu_{R_1}, \\ D_{L_\mu} &\rightarrow D_{L_\mu}, & \mu_R &\rightarrow \mu_R, & \nu_{R_2} &\rightarrow \nu_{R_2}, \\ D_{L_\tau} &\rightarrow \omega D_{L_\tau}, & \tau_R &\rightarrow \omega \tau_R, & \nu_{R_3} &\rightarrow \nu_{R_3}, \end{aligned} \quad (87)$$

gdzie:

$$\omega = e^{(2i\pi/3)}, \quad (88)$$

jest generatorem cyklicznej grupy  $Z_3$ , natomiast  $D_{L_j}$ , ( $j = e, \mu, \tau$ ) to dublety leptonowe. Transformacje te generują diagonalną macierz masową leptonów naładowanych  $M_l$ . Biliniowe produkty  $\overline{D}_{L_j} \nu_{R_k}$  oraz  $\nu_{R_j} \nu_{R_k}$  związane z macierzą  $M_D$  oraz odpowiednio z macierzą  $M_R$  transformują się zgodnie z:

$$\overline{D}_{L_j} \nu_{R_k} \sim \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega & \omega \\ \omega & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\nu}_{R_j} C \bar{\nu}_{R_k}^T \sim \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Zakładając, że dublet Higgsa transformuje się trywialnie względem grupy  $Z_3$ , macierz  $M_D$  przybiera formę:

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X \\ X & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Przyjmując, że zespolony skalarny singlet  $\chi$  transformuje się względem grupy  $Z_3$  zgodnie z regułą:  $\chi \rightarrow \omega^2 \chi$ , macierz  $M_R$  przybiera postać:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Po zastosowaniu mechanizmu „seesaw” I-go rodzaju, dostaje się macierz masową neutrin w postaci:

$$M_\nu^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X \\ 0 & X & X \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Biliniowy człon  $D_{L_j}^T C^{-1} D_{L_k}$  związany z macierzą  $M_L$  transformuje się względem symetrii  $Z_3$  jako:

$$D_{L_j}^T C^{-1} D_{L_k} \sim \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Wprowadźmy, skalarny względem grupy  $SU(2)$ , tryplet Higgsa, zapisany w macierzowej notacji dwuwymiarowej jako:

$$\Delta = \begin{pmatrix} H^+ & \sqrt{2}H^{++} \\ \sqrt{2}H^0 & -H^+ \end{pmatrix}, \quad (94)$$

który jest niezmiennikiem ze względu na grupę  $Z_3$ . Próżniowa wartość oczekiwana (VEV) dla trypletu Higgsa wynosi:

$$\langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_t & 0 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

gdzie:  $\langle H^0 \rangle_0 = \frac{v_t}{\sqrt{2}}$ .

Przy poczynionych założeniach wkład mechanizmu „seesaw” II rodzaju do macierzy  $M_L$  (wzór (86)) ma postać:

$$M_\nu^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & X & 0 \\ X & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Efektywna macierz masowa neutrin  $M_\nu$  po zastosowaniu mechanizmu „seesaw” I-go i II-go rodzaju jest sumą macierzy (92) oraz (96), ma więc postać:

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}, \quad (97)$$

która odpowiada teksturze  $A1$ . Warto zauważyć, że żądanie abelowej symetrii (88) prowadzi do diagonalizacji macierzy masowej dla naładowanych leptonów.

### 3.2 Tekstury zerowe dla neutrin majorany w przypadku zachowanej symetrii CP

Dyskusja zawarta w tej części rozprawy oparta jest na numerycznej metodzie zaprezentowanej w pracy [91]. Na jej potrzeby stworzony został program komputerowy w języku FORTRAN, który w oparciu o metodę „top-down”, służy do weryfikacji zgodności omawianych tekstur z danymi doświadczalnymi. Założeniem tej analizy jest przebadanie symetrycznej, rzeczywistej, trójwymiarowej macierzy masowej neutrin, a więc zakładając brak łamania symetrii CP. Symetryczność macierzy masowej neutrin jest tożsama z przyjęciem natury Majorany neutrin. Używana w programie macierz masowa przyjmuje postać:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Pomimo założenia braku łamania symetrii CP dla neutrin Majorany, wnioski płynące z analizy nie są trywialne, co zostanie wykazane w dalszej części rozdziału.

Aby zobaczyć w jaki sposób coraz bardziej precyzyjne wyniki (w szczególności wykrycie, że  $\theta_{13} \neq 0$ ) dyskusję przewidywań teoretycznych podzielono na dwie części. Zaprezentowane zostaną oryginalnie opublikowane rozwiązania, zgodne z danymi oscylacyjnymi właściwymi dla czasu ich publikacji jak również nowe, opracowane a zgodne z bieżącymi danymi.

#### 3.2.1 Opis algorytmu weryfikacji tekstur zerowych

Zadaniem opracowanego programu numerycznego jest znajdowanie takich wartości parametrów macierzy masowej neutrin  $\mathcal{M}_\nu$ , które poprzez relację (48), wyznaczają elementy macierzy mieszania oraz różnice kwadratów mas zgodne z danymi eksperymentalnymi. Aby sprawdzić wszystkie kombinacje parametrów użyjemy adaptacyjnej metody Monte Carlo (AMC - Adaptive Monte Carlo). Poniższy podrozdział opisuje algorytm tego programu.

Działanie programu dzieli się na dwa etapy. W pierwszej kolejności generowane są losowe parametry wejściowe, czyli elementy macierzy masowej neutrin. Kształt tej macierzy: ilość przyjętych jej elementów równych zero, jest kontrolowany przez użytkownika. Za pomocą odpowiednich bibliotek numerycznych (NAG [92]) macierz ta jest diagonalizowana. Uzyskane wektory oraz wartości własne są porównywane z danymi eksperymentalnymi. Akceptowane i zapamiętywane są wyniki losowania, które dają mieszczące się w granicach błędów wielkości mierzone. Pierwszy etap jest bardzo czasochłonny. Spośród wszystkich sprawdzanych kombinacji, wyniki losowania zgodne z

ewidencją eksperymentalną, stanowią znikomą część (rzędu  $10^2$  spośród  $10^9$  losowań). Aby efektywnie, w dużo krótszym czasie, znaleźć szersze spektrum zgodnych z eksperymentem wyników, można ich poszukiwać w bliskim sąsiedztwie już zaakceptowanych i zapamiętanych wyników. Jest to czynione w drugim kroku działania programu numerycznego.

Drugi etap działania programu inicjuje algorytm AMC. W algorytmie tym jako dane wejściowe używany jest zbiór punktów wygenerowanych w etapie pierwszym. Procedura ma za zadanie poszukiwać dodatkowych rozwiązań, w małych przedziałach wokół już uzyskanych wyników. Dodatkowo spośród poszerzonego spektrum rozwiązań program wyznacza te z nich, które mają najmniejszą wartość  $\chi^2$ . Dla każdego zbioru punktów, uzyskanych w etapie pierwszym, program wykonuje  $N_{it}$  iteracji, w każdej iteracji sukcesywnie ograniczając przedział w którym losowane są wartości macierzy masowej. Dla każdego z tych przedziałów, macierz masowa losowana jest i diagonalizowana, a następnie porównywana z ewidencją eksperymentalną  $N_{calc}$  razy. W rezultacie uzyskuje się dodatkowe punkty będące w zgodności z danymi eksperymentalnymi. Tak przeprowadzona procedura w kroku drugim może być  $10^4$  razy szybsza niż w kroku pierwszym, jednocześnie znajdując  $10^4$  więcej rozwiązań.

Na rysunku 2 (na stronie 30) zobrazowany jest przykładowy wynik działania pierwszego oraz drugiego etapu programu numerycznego dla tekstury A1 przy wartościach  $N_{scat} = N_{it} = N_{calc} = 100$ . Szersze omówienie tej tekstury znajduje się w dalszej części pracy.

By zobrazować uzyskane wyniki, należy mieć na uwadze, że możliwa jest jedynie takowa ich prezentacja, która uwzględnia korelację na jednym wykresie, co najwyżej trzech różnych elementów macierzy. We wszystkich zamieszczonych w pracy wykresach korelacyjnych wykresach, dla poprawy ich czytelności, prócz oryginalnie otrzymanych punktów, przedstawione są rzutowania na odpowiednie podprzestrzenie wykresów.

Poniżej zamieszczony jest szczegółowy opis etapów działania programu.

#### (a) Pierwszy etap

*Losowe generowanie parametrów wejściowych:*

Dla każdej  $n$ -tej iteracji ( $n = 1, 2, \dots, N_{scat}$ ) program generuje zbiór wejściowych parametrów - elementów macierzy masowej neutrin. Ilość iteracji jest kontrolowana przez użytkownika.

*Diagonalizacja macierzy masowej neutrin  $\mathcal{M}_\nu$ :*

Dla każdej losowej macierzy masowej neutrin program wyznacza wartości własne, które utożsamia się z masami neutrin oraz znormalizowane wektory własne. Wartości własne służą do wyznaczenia różnic kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2$  oraz  $\Delta m_{32}^2$ . Elementy znormalizowanych wektorów

własnych utożsamia się z wartościami modułów macierzy mieszania neutrin.

Algorytm programu jest w stanie rozróżnić normalną i odwrotną hierarchię mas.

*Porównanie danych z wynikami eksperymentalnymi:*

Kryterium służącym do przyjęcia wylosowanej macierzy masowej neutrin jest test  $\chi^2$  dla uzyskanych wektorów i różnic kwadratów mas. Oznaczając przez  $x_i$  wyniki losowania, a przez  $x_i^{cent}$  eksperymentalnie otrzymane centralne wartości  $\chi^2$  obliczamy jak zwykle, w sposób:

$$\chi_i^2 = \frac{(x_i^{cent} - x_i)^2}{\left(\frac{\sigma_i}{\alpha}\right)^2}, \quad (99)$$

gdzie,  $\sigma_i^2$  są niepewnościami pomiarowymi na poziomie  $3\sigma$ , zmierzonych eksperymentalnie kwadratów mass oraz wartości modułów macierzy mieszania.

Parametr  $\alpha$  daje użytkownikowi możliwość skalowania założonego błędu pomiarowego. Dla  $\alpha = 1$  test  $\chi^2$  weryfikuje zgodność losowanych punktów dokładnie na poziomie  $3\sigma$ . Przy wartości  $\alpha > 1$  zgodność losowanych punktów z danymi eksperymentalnymi badana jest w węższym przedziale.

Zachowywane są zarówno elementy losowanej macierzy masowej neutrin, jak i odpowiadające im numerycznie uzyskane elementy macierzy mieszania wraz z odpowiadającymi im masami neutrin.

Celem pierwszego etapu jest uzyskanie wstępnych, losowo rozrzuconych punktów, w hiperprzestrzeni o wymiarze zadany ilością niezerowych elementów macierzy masowej.

(b) Drugi etap: metoda AMC

*Wczytanie danych wejściowych:*

Program odczytuje każdy  $n$ -ty ( $n = 1, 2, \dots, N_{Scat}$ ) zestaw danych  $x_i$ , wygenerowanych w pierwszym kroku oraz ustawia je jako nowe wartości centralne  $x_i^{cent}$ .

Następnie dla każdego  $i$ -tego kroku ( $i = 1, 2, \dots, N_{it}$ ) zawężany jest obszar wokół którego losowane będą nowe dozwolone rozwiązania, zgodnie z regułą:

$$x_i^{cent} \pm \xi_{it}\delta_i, \quad (100)$$

gdzie  $\delta_i$  jest początkowym zakresem, a  $\xi_{it}$  funkcją zdefiniowaną jako:

$$\xi_{it} = \begin{cases} 1 & it = 0, \\ 0.6/it & it > 0. \end{cases} \quad (101)$$

Zarówno stała liczbowa 0.6 jak i funkcja  $1/it$  dobrane są w sposób empiryczny.

Analogicznie jak w pierwszym etapie działania programu, wykonywane są kolejno  $N_{calc}$  ilość razy obliczenia:

- (1) *Losowe generowanie parametrów.*
- (2) *Diagonalizacja.*
- (3) *Porównanie z ewidencją eksperymentalną i zapis zgodnych z nią wyników.*

*Wyznaczenie nowych wartości centralnych:*

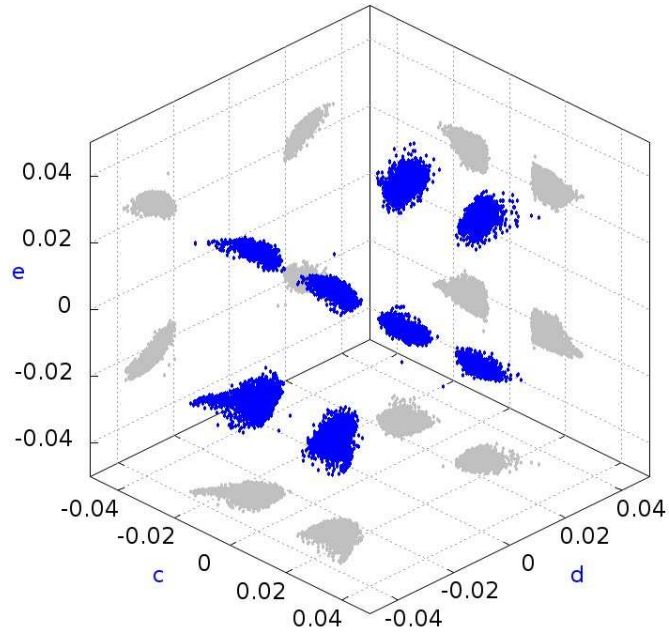
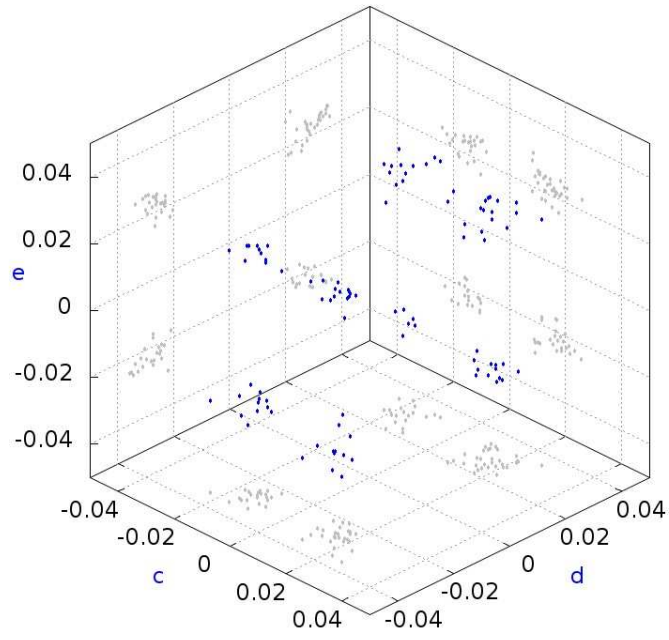
Po każdej iteracji wybierany jest ten zestaw punktów, dla których wartość  $\chi^2$  jest najmniejsza:

$$\chi^2 = \sum_{i=1} \chi_i^2. \quad (102)$$

i ustawiany jest jako nowa wartość centralna.  $x_i^{cent}$ . Należy zauważyć, że wraz ze wzrostem  $it$ , wartość funkcji  $\xi_{it}$  maleje. Tak więc, wraz ze wzrostem  $it$  zakres w którym losuje się parametry będzie malał jednocześnie wartość centralna będzie przesunąć się do najbardziej prawdopodobnej.

W etapie drugim również zachowywane są zarówno elementy macierzy mieszania neutrin jak i opowiadające im wektory własne wraz z wartościami własnymi.

Rozważana jest macierz masowa neutrin z rzeczywistymi elementami, tak więc, uzyskane w wyniku działania programu wektory własne porównywane muszą być z modułami macierzy mieszania uzyskanymi eksperymentalnie. Implikuje to fakt niemożności przypisania znaków kątom mieszania.



Rysunek 2: Tekstura A1. Pierwszy (wykres górny) i drugi (wykres dolny) etap losowania. Wykresy uzyskane dla  $N_{scat} = N_{calc} = N_{it} = 100$ .

### 3.2.2 Krótki przegląd wyników opartych na starych, mniej precyzyjnych danych doświadczalnych

Zaprezentowane tu wyniki analizowane były [91] przy ograniczeniach na moduły elementów macierzy mieszania oraz różnicach kwadratów mas pochodzących z pracy [93], a zamieszczonych w Tabeli 6. Zauważyć należy, że w pracy tej, mimo braku w tamtym okresie potwierdzenia eksperymentalnego, zakładano górne ograniczenie dla kąta  $\theta_{13}$  różne od zera.

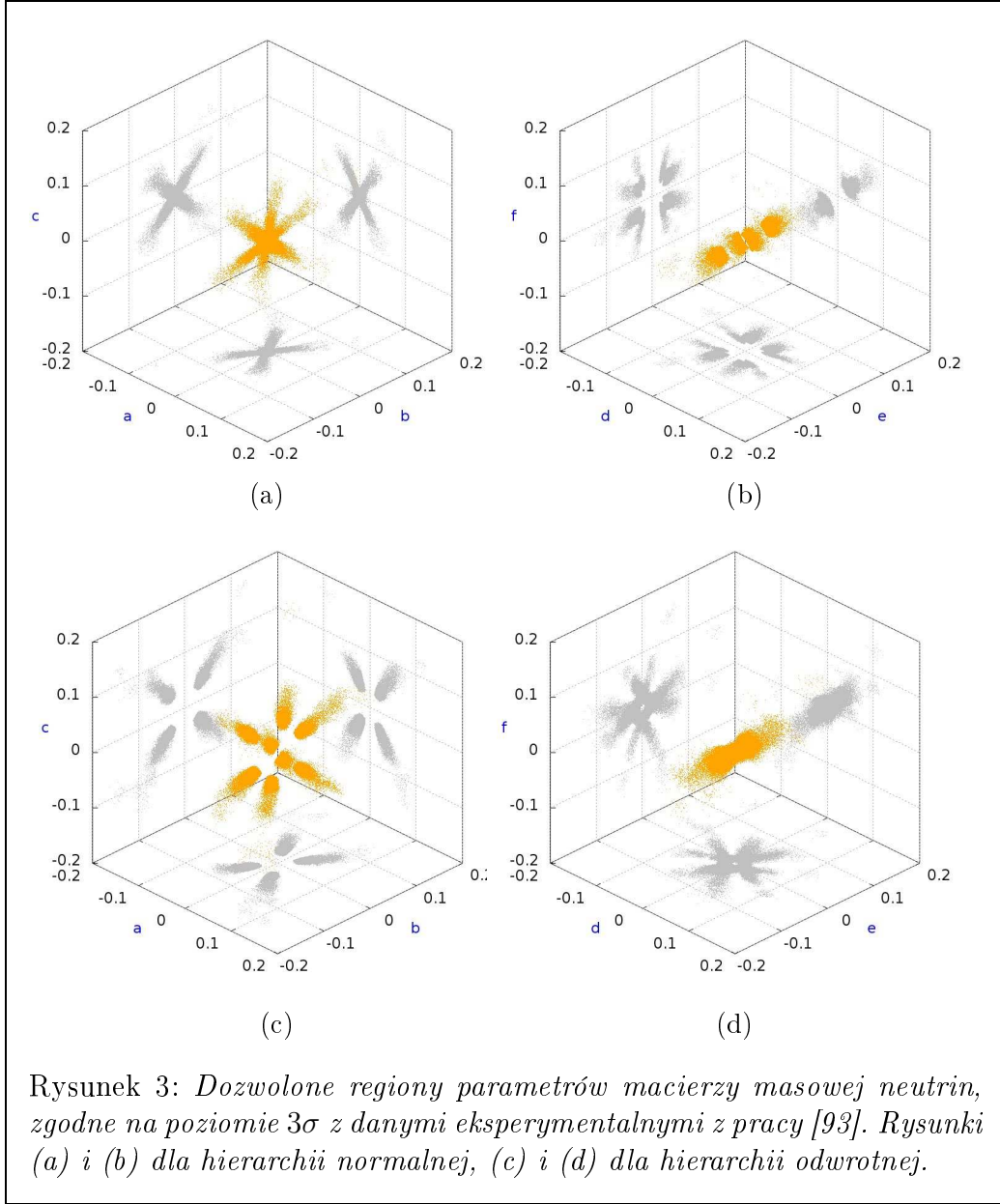
$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$\sigma_i$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$8.3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.835	0.045
4	$ U_{e2} $	0.54	0.07
5	$ U_{e3} $	0.1	0.1
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.165
7	$ U_{\mu 2} $	0.575	0.155
8	$ U_{\mu 3} $	0.7	0.12
9	$ U_{\tau 1} $	0.365	0.165
10	$ U_{\tau 2} $	0.59	0.15
11	$ U_{\tau 3} $	0.685	0.125

Tabela 6: Dozwolone wartości centralne i błędy na poziomie  $3\sigma$  modułów macierzy mieszania  $|U_{ij}|$  oraz różnic kwadratów mas  $\Delta m_{32}^2$ ,  $\Delta m_{21}^2$  pochodzące z pracy [93].

Ogólne rozwiązania, czyli takie dla których nie zakładano żadnych zer w diagonalizowanej macierzy masowej, przedstawione są na rysunku 3 (na stronie 32) dla przykładowej korelacji pomiędzy parametrami a,b,c oraz odpowiednio d,e,f w macierzy (98). Pozostałe korelacje dla tego przypadku dostępne są na stronie internetowej [94]. Można z nich szacować, w jakich przedziałach znajdują się rozwiązania dla konkretnych tekstur zerowych. Spektrum częstotliwości występowania konkretnych elementów macierzy masowej, dla rozwiązań ogólnych, prezentują histogramy zamieszczone na rysunku 4 (na stronie 33), dla hierarchii normalnej oraz odpowiednio na rysunku 5 (na stronie 33), dla hierarchii odwrotnej. Brak symetryczności histogramów względem zera jest efektem związanym z dokładnością obliczeń numerycznych.

Z przeanalizowanych 6-ciu możliwych tekstur zerowych, przy założeniu błędu na poziomie  $3\sigma$  (czyli dla  $\alpha = 1$ ) dozwolone były wszystkie z wyjątkiem jednego przypadku: nie była realizowana tekstura z parametrem  $a = 0$  (oznaczana jako A) dla hierarchii odwrotnej. Generalnie, tekstury z elementem  $a = 0$ , bez względu na ilość innych niezależnych parametrów macierzy masowej równych 0, są istotne ponieważ związane są z przekrojem czynnym

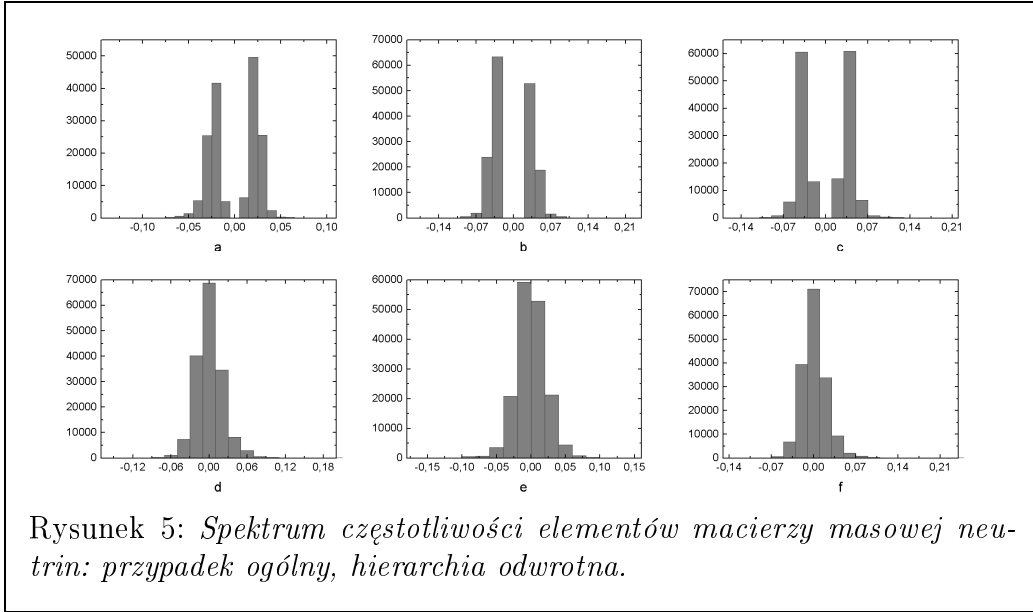
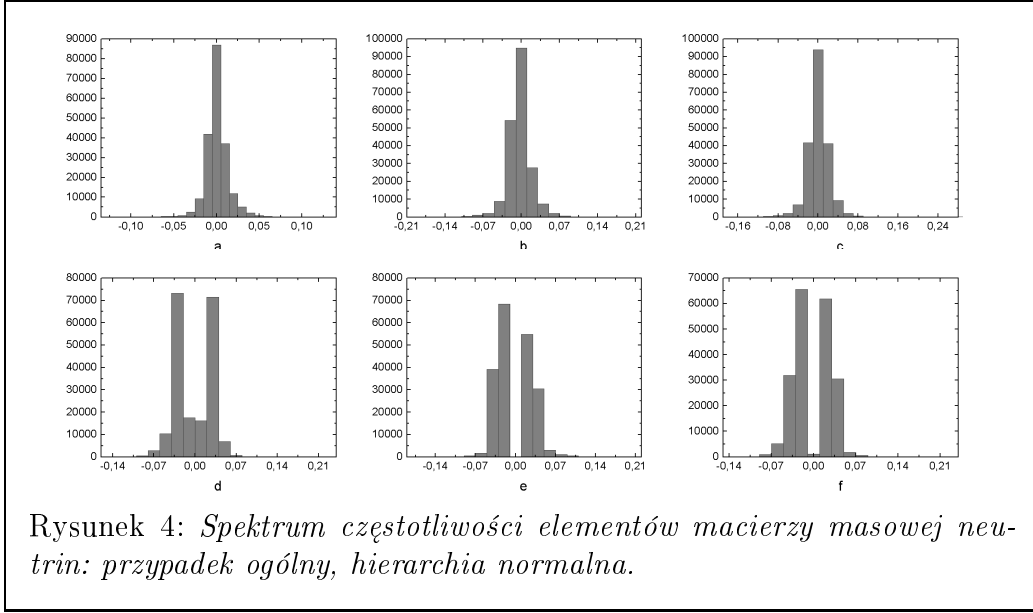




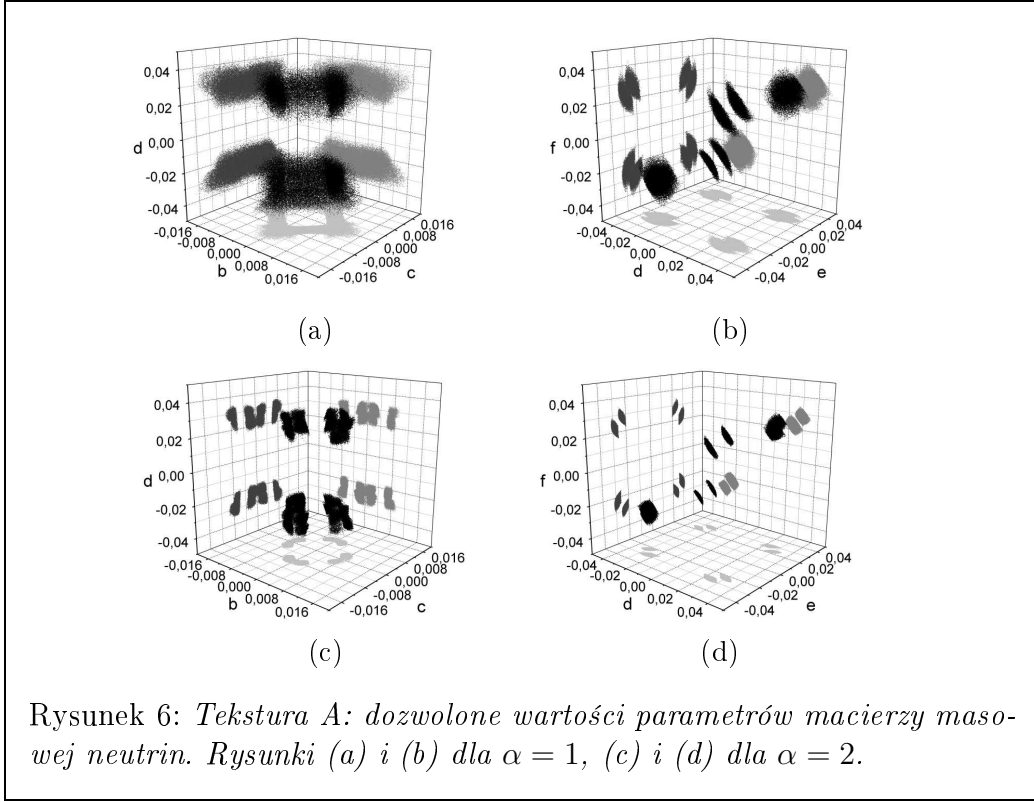
na bezneutrinowy rozpad  $\beta$  ( $\sigma_{0\nu\beta\beta}$ ) poprzez relację:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{0\nu\beta\beta} \sim \langle m_{ee} \rangle = \sum_{i=1}^3 U_{ei}^2 m_i = 0. \quad (103)$$

Efektywny parametr (64) (patrz strona 17), oznaczany dalej jako  $\langle m_{\beta\beta 0\nu} \rangle$ , jest dla takich tekstur równy zero [95]. Wyklucza to istnienie tego rozpadu



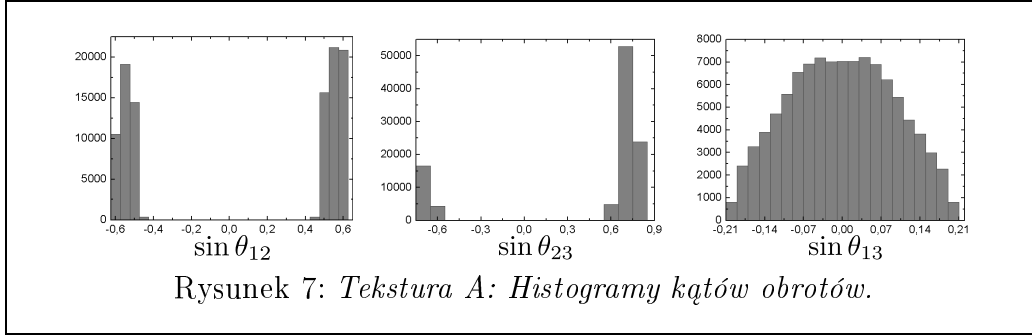
dla hierarchii normalnej poprzez wymianę neutrin Majorany. Ewentualne jego wykrycie przy tym schemacie masowym, tłumaczone musiałoby być innym mechanizmem. Jednocześnie należy mieć na uwadze, że wartość  $\langle m_{ee} \rangle = 0$  nie musi „ad hoc” implikować dla neutrin natury Diraca. Regiony możliwych rozwiązań dla tekstury A zawarte są na rysunku 6.



Przedstawione są na nim rozwiązania dla parametru  $\alpha = 1$  oraz odpowiednio dla  $\alpha = 2$ . Zgodnie z założeniami, ilość rozwiązań przy rosnącym  $\alpha$  maleje, a dla wartości  $\alpha = 2$  drastycznie spada co oznacza że, akceptowane są rozwiązania położone bliżej wartości centralnych. Manifestuje się to zmniejszeniem dozwolonych regionów rozwiązań na wykresach.

Graniczna wartość czynnika  $\alpha$ , oznaczana dalej jako  $\alpha_0$ , przy której dla próby rzędu  $10^9$  losowań, nie ma żadnych pozytywnych rozwiązań dla tekstury A wynosi  $\alpha_0 = 3.32$ . Taka wartość oznacza, że ewentualne przyszłe, większe ograniczenie błędów eksperymentalnych na moduły macierzy mieszania oraz różnice kwadratów mas, nie zaowocuje eliminacją tej tekstury. Aby tekstura ta nie była w przyszłości realizowana, zakładając niezmienniczości centralne, przyszłe oszacowania błędów musiałyby zmniejszyć się do poziomu  $\sim 0.9\sigma$ .

Dystrybucje kątów mieszania  $\theta_{ij}$  dla tekstury A pokazane są na rysunku 7. Z histogramu dla  $\sin \theta_{13}$  można wyczytać, że przy starych parametrach oscylacyjnych, do zrealizowania tej tekstury, preferowany był kąt  $\theta_{13}$  bliski zeru, ale jednocześnie nie jest wykluczona inna jego wartość. Bezneutrinowy rozpad beta jest niezależny od kąta  $\theta_{23}$  [71, 96] (w parametrze (64) kąt ten nie wy-



stępuje). Znajduje to odzwierciedlenie w histogramach tego kąta dla tekstur z elementem  $a \neq 0$ , są one identyczne jak dla tekstury A. Histogramy, jak i wykresy z dozwolonymi regionami dla pozostałych tekstur z jednym elementem zerowym dostępne są na stronie internetowej [94].

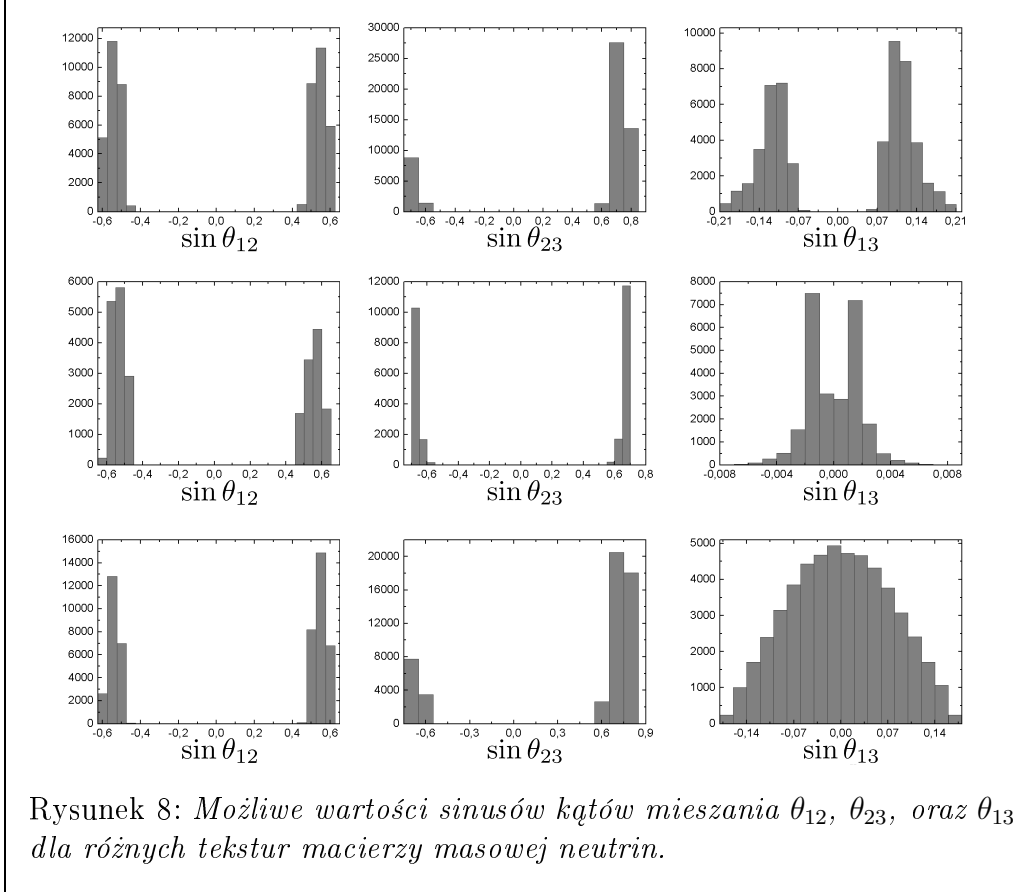
Z przebadanych wszystkich 15 możliwych tekstur zerowych II-go typu, czyli tych mających dwa niezależne zerowe parametry, procedura AMC potwierdziła, dla starych danych oscylacyjnych, realizację dokładnie tych samych siedmiu tekstur, które przewidziano analitycznie w pracy [70]. Dla hierarchii normalnej realizowane są tekstury A1 oraz A2. Tekstury od B1 do B4 realizowane są zarówno dla założonej hierarchii normalnej jak i odwrotnej. Tekstura C możliwa jest tylko przy założonej hierarchii odwrotnej. Tutaj, podobnie jak dla tekstur z jednym niezależnym parametrem równym zero, za kryterium wykluczenia istnienia realizacji tekstury przyjęto, iż odrzuca się wzorzec, jeśli  $10^9$  losowań nie daje żadnego pozytywnego wyniku.

TEKSTURA	PARAMETRY ZEROWE	HIERARCHIA	$\alpha_0$
$A_1$	$a, b = 0$	NORMALNA	2.65
$A_2$	$a, c = 0$		
$B_1$	$c, d = 0$	OBIE	1.18
$B_2$	$b, f = 0$		
$B_3$	$b, d = 0$	OBIE	1.25
$B_4$	$c, f = 0$		
$C$	$d, f = 0$	ODWROTNA	2.65

Tabela 7: *Dozwolone tekstury z dwoma zerami.*

Ostatnia kolumna Tabeli 7 zawiera graniczną wartość parametru  $\alpha_0$ , powyżej której nie ma już pozytywnych rozwiązań, a więc takich gdy losowana macierz masowa daje parametry oscylacyjne zgodne z eksperymentem. Tekstury

realizujące się tylko przy jednym założonym schemacie masowym, czyli A1, A2 i C mają wartość tego parametru wyższą niż tekstury typu B. Oznacza to, że w pierwszym etapie losowania procedury AMC, tekstury te, dają wyniki zgodne w znacznie bardziej restrykcyjnym przedziale  $x_i^{cent} \pm \sigma_i$  niż tekstury typu B.



Poprzez kąty mieszania  $\theta_{ij}$ , wyniki dla tekstur z dwoma zerami zobrazowane są na histogramach zawartych na Rysunku 8. Widać wyraźnie, że dla tekstur A1 oraz A2 preferowany jest kąt  $\theta_{13}$  różny od zera. Tekstury B1 do B4 dopuszczają wartość tego kąta równą zero, ale najwięcej przypadków mamy dla wartości tego kąta minimalnie różnych od zera. Z kolei histogram kąta  $\theta_{13}$  dla tekstury C przypomina rozkład normalny, z wartością centralną bliską zero. Konkluzje te znajdują potwierdzenie w modułach elementów macierzy mieszania które w procedurze AMC miały najmniejszą wartość  $\chi^2$  (Tabela 8). Wyraźnie widać, że największe względne odejście od startowych wartości centralnych dotyczy wartości  $|U_{e3}| = |\sin \theta_{13} e^{-i\delta}|$ . Dla tekstur typu A wartość tego modułu wzrosła, podczas gdy dla pozostałych zmalała.

$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$A_1, A_2$	$B_1 - B_4$	$C$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$8.3 \cdot 10^{-5}$	$8.27 \cdot 10^{-5}$	$8.35 \cdot 10^{-5}$	$8.30 \cdot 10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.835	0.84	0.84	0.84
4	$ U_{e2} $	0.54	0.54	0.54	0.54
5	$ U_{e3} $	0.1	0.12	$1.9 \cdot 10^{-3}$	0.06
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.41	0.40	0.36
7	$ U_{\mu 2} $	0.575	0.56	0.63	0.58
8	$ U_{\mu 3} $	0.7	0.72	0.66	0.72
9	$ U_{\tau 1} $	0.365	0.36	0.36	0.41
10	$ U_{\tau 2} $	0.59	0.63	0.55	0.59
11	$ U_{\tau 3} $	0.685	0.68	0.75	0.68

Tabela 8: Zmiana startowej wartości  $x_i^{cent}$  w wyniku działania procedury AMC.

Omawiana procedura AMC nie daje pozytywnych wyników dla tekstur z ilością niezależnych zerowych parametrów macierzy masowej neutrin większych lub równych od trzech. Eliminuje to bezwzględnie wszystkie modele zakładające zera na diagonalnej w macierzy masowej neutrin.

### 3.2.3 Analiza obecnych danych doświadczalnych

Dla porównania, obecne wyniki będziemy omawiać w takiej samej kolejności jak w poprzednim podrozdziale. Zamieszczone rezultaty dla bieżących danych oscylacyjnych neutrin są nowe i nie były dotąd publikowane.

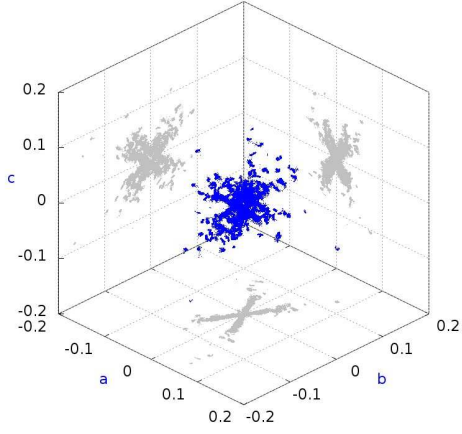
Analizy dokonujemy przy danych doświadczalnych wziętych z pracy [30]. Nowsza praca tych samych Autorów [97] nie zmienia w żaden sposób wyników. Tabela 9 podsumowuje parametry oscylacyjne dla na modułów elementów macierzy mieszania wraz z błędami na poziomie  $3\sigma$ . Zamieszczone są w niej również, przy tym samym poziomie błędów, oszacowania różnic kwadratów mas neutrin. Obszary rozwiązań ogólnych (Rys. 9 na stronie 39), dopuszczających wszystkie elementy macierzy masowej neutrin różne od zera, różnią się nieznacznie od analogicznych prezentowanych w podrozdziale 3.2.2 (porównaj z Rys. 3 na stronie 32), zarówno dla schematu normalnego jak i odwrotnego. Wzajemne odstępstwa są większe bliżej granic uzyskanych regionów rozwiązań. Kształty dla bieżących danych wydają się być mniej regularne.

Analogia ta znajduje również potwierdzenie w histogramach. Aktualne histogramy dla obu schematów masowych umieszczone są na Rysunkach: 10 na

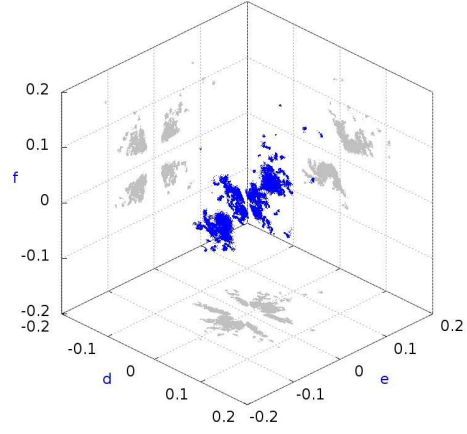
$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$\sigma_i$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$7.54 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.822	0.04
4	$ U_{e2} $	0.54	0.05
5	$ U_{e3} $	0.155	0.15
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.135
7	$ U_{\mu 2} $	0.704	0.13
8	$ U_{\mu 3} $	0.614	0.11
9	$ U_{\tau 1} $	0.443	0.172
10	$ U_{\tau 2} $	0.452	0.15
11	$ U_{\tau 3} $	0.774	0.113

Tabela 9: *Dozwolone wartości centralne i błędy na poziomie  $3\sigma$  modułów macierzy mieszania  $|U_{ij}|$  oraz różnic kwadratów mas  $\Delta m_{32}^2$ ,  $\Delta m_{21}^2$  obliczone na podstawie pracy [30].*

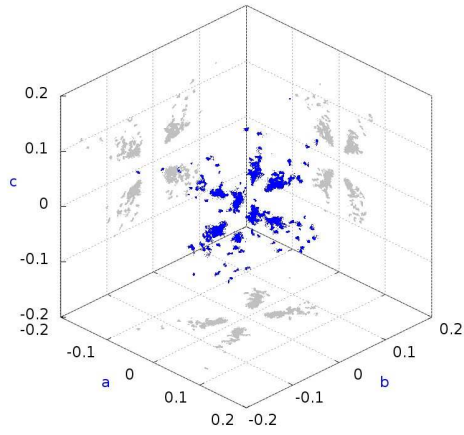
stronie 40 dla hierarchii normalnej i 11 na stronie 40 dla hierarchii odwrotnej. Dla hierarchii normalnej zarówno dla starszych jak i nowych danych, różne od zera parametry macierzy masowej neutrin to **e** oraz **f** (porównaj Rysunek 4, na stronie 33 z Rysunkiem 10 na stronie 40), natomiast dla hierarchii odwrotnej to: **a**, **b** oraz **c** (porównaj Rysunek 5 na stronie 33 z Rysunkiem 11 na stronie 40).



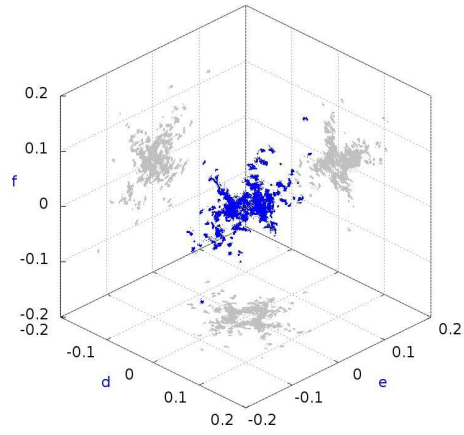
(a)



(b)



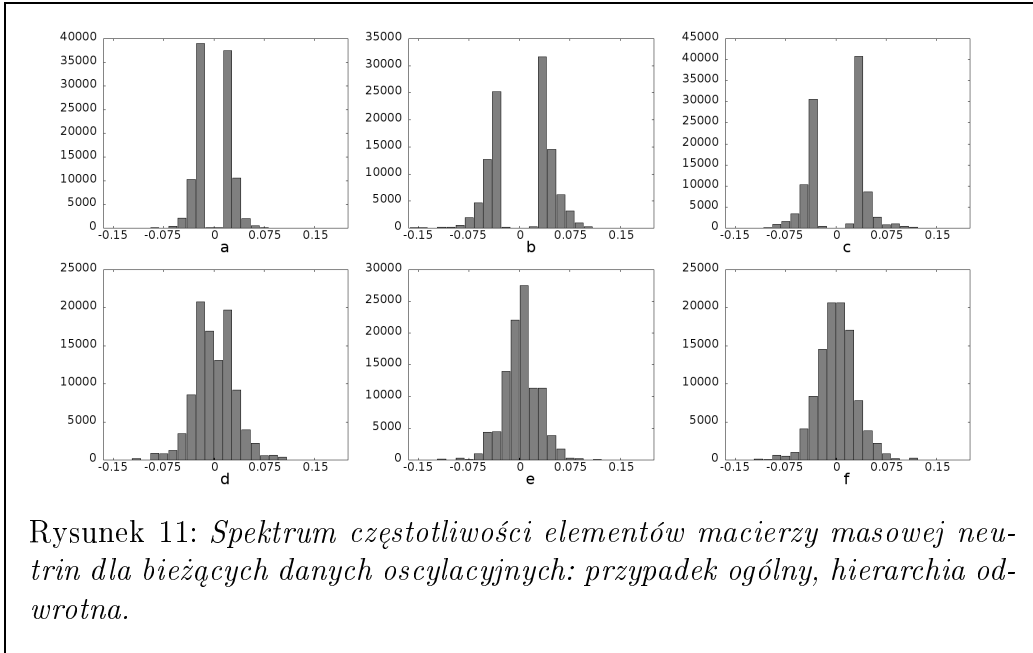
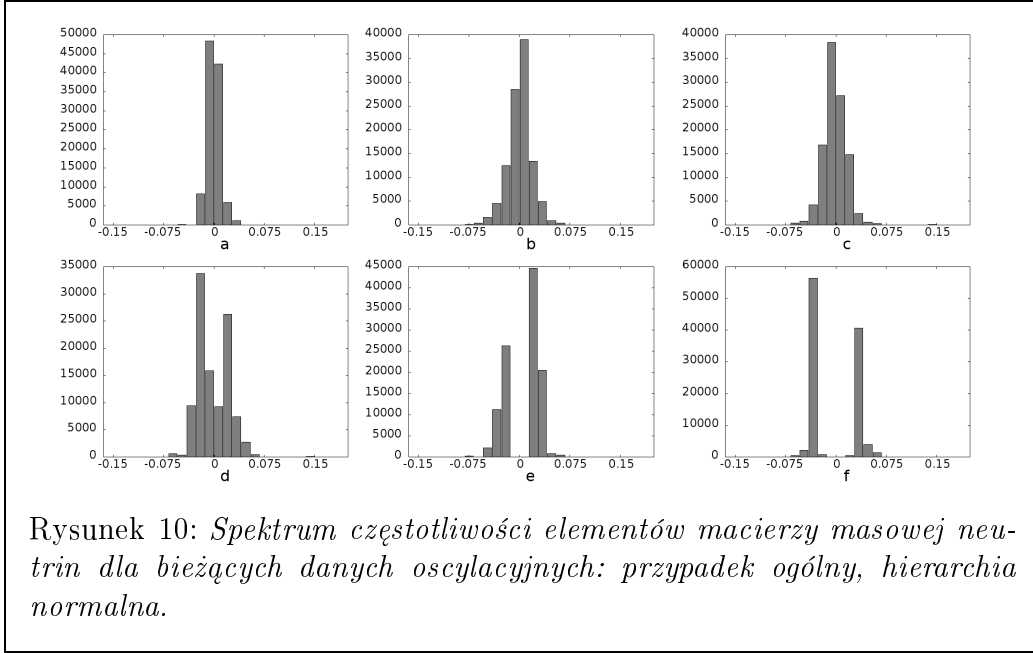
(c)



(d)

Rysunek 9: *Dozwolone regiony parametrów macierzy masowej neutrin, pozostających w zgodzie z aktualnymi danymi eksperymentalnymi na poziomie  $3\sigma$ . Rysunki (a) i (b) dla hierarchii normalnej. Odpowiednio Rysunki (c) i (d) dla hierarchii odwrotnej.*

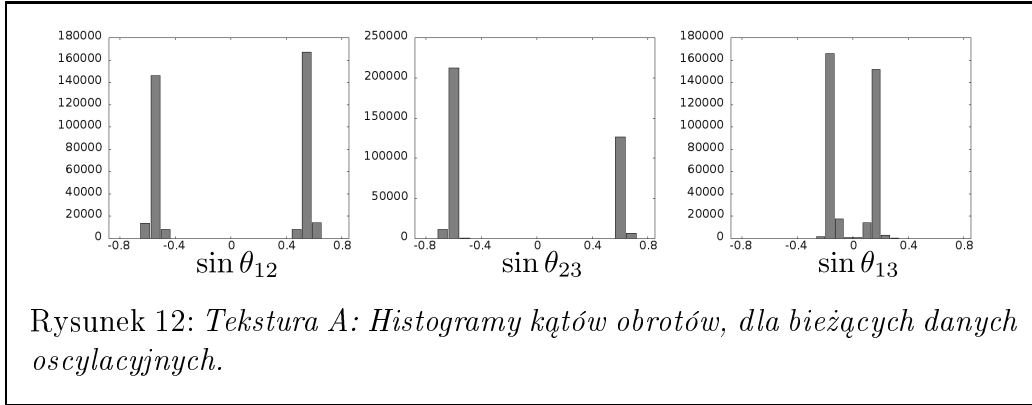




Wniosek stwierdzający brak istnienia tekstury z jednym niezależnym parametrem  $a = 0$  dla hierarchii odwrotnej, przy nowych danych, utrzymany jest w mocy. Pozostałe tekstury z jednym zerem są w dalszym ciągu możliwe.

Podobnie jak dla starszych danych, ze względu na bezpośrednią korelację z bezneutrinowym rozpadem beta warto spośród tekstur z jednym zerem, wyróżnić teksturę A - z elementem  $a = 0$ . Podobnie jak dla nieaktualnych już parametrów oscylacyjnych, tekstura ta realizowana jest tylko i wyłącznie dla hierarchii normalnej. Utrzymany jest w mocy wniosek o nierealizowaniu bezneutrinowego rozpadu beta dla hierarchii normalnej. W wynikach opartych na starszych, nieaktualnych już danych wartość parametru  $\alpha_0$  dla tej tekstury wynosiła 3.32. Dla aktualnych danych eksperymentalnych  $\alpha_0$  zmalało do 2.23.

Informacja o kątach mieszania dla tej tekstury odczytana z histogramów (Rysunek 12) wyraźnie wskazuje różny od zera kąt  $\theta_{13}$ . Rozpatrując ten kąt, można stwierdzić, że odróżnia to istotnie uzyskane dane, od tych uzyskanych przy obowiązywaniu starych danych oscylacyjnych (patrz Rysunek 7 na stronie 35). Dla dwóch pozostałych kątów histogramy dla starszych i aktualnych danych eksperymentalnych są porównywalne. Najczęściej występująca wartość kąta  $\theta_{13}$  zbliżona jest do wartości obecnie mierzonej. Efektu tego można było się spodziewać.



Rysunek 12: Tekstura A: Histogramy kątów obrotów, dla bieżących danych oscylacyjnych.

Sytuacja dla tekstur zerowych II-go typu - mających dwa niezależne parametry zerowe - jest różna dla nowych danych oscylacyjnych. Po ponownym przebadaniu wszystkich możliwych kombinacji okazuje się, że spośród poprzednio możliwych 7 tekstur z dwoma zerami aktualne pozostaje jedynie 5. Z listy możliwych realizacji definitywnie odrzucone są tekstury B2 i B4. Dodatkowo okazuje się, że poprzednio dopuszczana realizacja tekstury B1 oraz B3 przy odwrotnym schemacie masowym nie ma obecnie miejsca. Pełna lista realizowanych tekstur z dwoma zerami zaprezentowana jest w Tabeli 10. Faworyzowana jest realizacja schematu z normalną hierarchią mas. Jedynie

TEKSTURA	PARAMETRY ZEROWE	HIERARCHIA	$\alpha_0$
$A_1$	$a, b = 0$	NORMALNA	3.54
$A_2$	$a, c = 0$	NORMALNA	2.89
$B_1$	$c, d = 0$	NORMALNA	1.08
$B_3$	$b, d = 0$	NORMALNA	1.12
$C$	$d, f = 0$	ODWROTNA	1.41

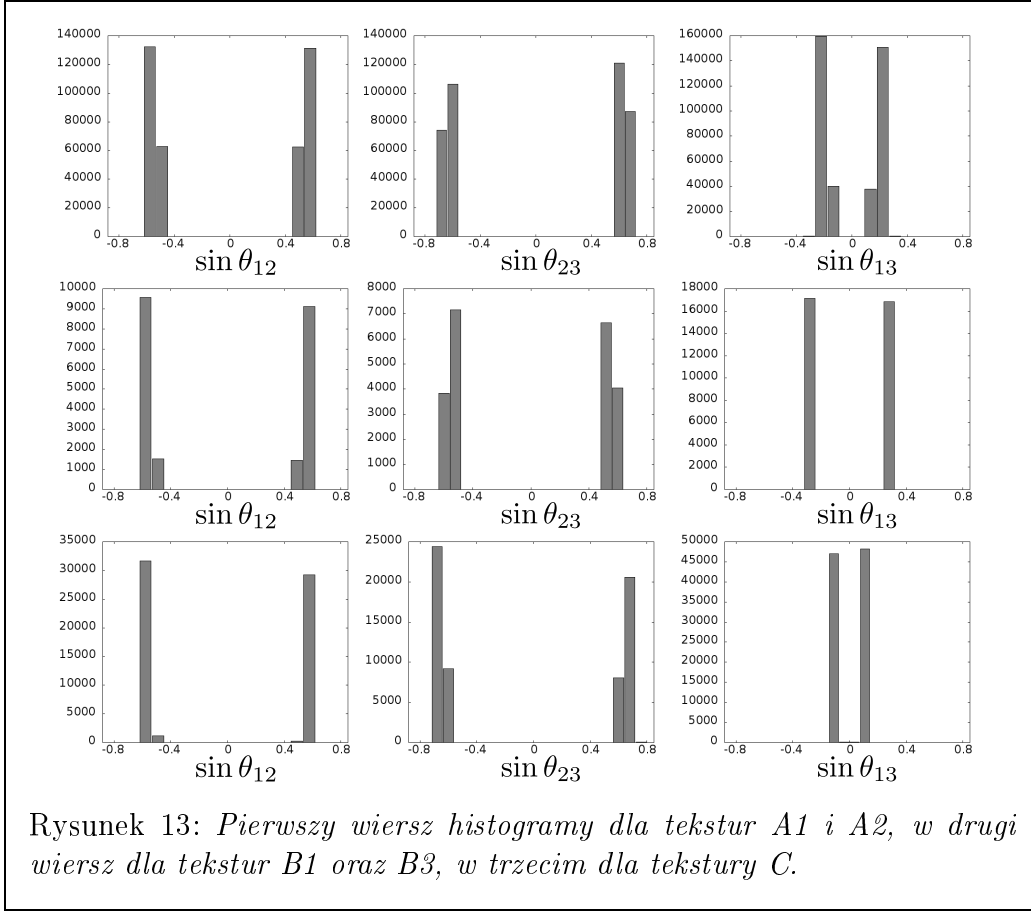
Tabela 10: *Dozwolone tekstury z dwoma zerami.*

tekstura C, tak jak przy poprzednich danych, ciągle możliwa jest przy odwrotnej hierarchii mas (patrz Tabela 7 na stronie 35).

Tekstura A1 oraz tekstura A2 charakteryzują się wyższymi od pozostałych wartościami parametru  $\alpha_0$  (ostatnia kolumna w Tabeli 10). Jednocześnie wartości te są wyższe niż analogiczne uzyskane dla tych tekstur przy nieobowiązujących już danych oscylacyjnych. Pozostałe tekstury mają wartości tego parametru mniejsze od szacowanych dla starszych danych oscylacyjnych. Dla tekstury B1 aktualnie szacowana wartość  $\alpha_0$  jest najniższa, bliska jedności. Może to wskazywać, że w przyszłości, przy dokładniejszych danych oscylacyjnych, tekstura ta będzie wykluczona. Dla tekstury B3,  $\alpha_0$  wynosi dla obecnych danych 1.12. Dla nieaktualnych danych wartość ta wynosiła 1.25. Dla tekstury C  $\alpha_0$  zmalało od wartości 2.65, wyznaczonej dla starych danych oscylacyjnych, do wartości 1.41, szacowanej dla nowych danych eksperymentalnych.

Dystrybucje uzyskanych kątów mieszania dla tekstur z dwoma zerami zamieszczone są na Rysunku 13 (na stronie 43). Tabela 11 (na stronie 43) zawiera informację o wartościach modułów macierzy mieszania oraz różnicach kwadratów mas przy najmniejszej wartości  $\chi^2$  uzyskanej metodą AMC w konfrontacji z wartościami początkowymi.

Istotną informacją jest to, że nie uzyskano żadnych innych rozwiązań. Katalog możliwych realizacji tekstur II-go typu jest tylko i wyłącznie zawężony. Podobnie nie ma żadnych możliwych rozwiązań dla ilości niezależnych zer macierzy masowej równej lub większej od trzech.



$i$	$x_i$	$x_i^{cent}$	$A_1, A_2$	$B_1 - B_4$	$C$
1	$\Delta m_{32}^2$	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-3}$
2	$\Delta m_{21}^2$	$7.54 \cdot 10^{-5}$	$8.27 \cdot 10^{-5}$	$8.35 \cdot 10^{-5}$	$8.30 \cdot 10^{-5}$
3	$ U_{e1} $	0.822	0.828	0.821	0.827
4	$ U_{e2} $	0.54	0.527	0.496	0.557
5	$ U_{e3} $	0.155	0.186	0.277	0.068
6	$ U_{\mu 1} $	0.355	0.31	0.318	0.462
7	$ U_{\mu 2} $	0.704	0.713	0.805	0.607
8	$ U_{\mu 3} $	0.614	0.626	0.498	0.645
9	$ U_{\tau 1} $	0.443	0.464	0.472	0.318
10	$ U_{\tau 2} $	0.452	0.460	0.321	0.565
11	$ U_{\tau 3} $	0.774	0.756	0.820	0.760

Tabela 11: Zmiana wartości centralnej  $x_i^{cent}$  w wyniku działania procedury AMC.

### 3.3 Fenomenologiczna rekonstrukcja macierzy masowej leptonów w funkcji masy najlżejszego neutrina

Rekonstrukcja macierzy masowej neutrin w funkcji najlżejszego neutrina jest przykładem metody „bottom-up”. Jest to metoda która zakłada symetryczną, zespoloną macierz masową w postaci:

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} M_{11}e^{i\phi_1} & M_{12}e^{i\phi_2} & M_{13}e^{i\phi_3} \\ M_{12}e^{i\phi_2} & M_{22}e^{i\phi_4} & M_{23}e^{i\phi_5} \\ M_{13}e^{i\phi_3} & M_{12}e^{i\phi_2} & M_{33}e^{i\phi_6} \end{pmatrix}, \quad (104)$$

która jawnie zależy od 6-ciu modułów oraz 6-ciu faz.

Korzystając z odwrotnej, w sensie macierzowym, relacji do równania (48) (strona 12):

$$\mathcal{M}_\nu = U^\dagger m_{diag} U^{-1}, \quad (105)$$

można wyrazić wszystkie elementy: zarówno moduły jak i fazy, macierzy (104) jako funkcję:

$$(\mathcal{M}_\nu)_{ik} = f_{ik}(\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, m_1, m_2, m_3, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3). \quad (106)$$

Dostaje się w ten sposób odpowiedniość pomiędzy wszystkimi 12 elementami macierzy mieszania i macierzy masowej.

Funkcja  $f_{ik}$  bezpośrednio zależy zarówno od fazy Diraca  $\delta$  jak i faz Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$  oraz trzech faz niefizycznych  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Faza Diraca i fazy Majorany są mierzalne. Z eksperymentów oscylacyjnych posiadamy już pewne informacje o fazie  $\delta$ , oszacowania na jej wartość podane zostały w Tabeli (2) na stronie 16. Brak jest jednak jakichkolwiek informacji doświadczalnych o fazach Majorany.

Metoda omawia w tej części bazować będzie na wyborze, przy odpowiednio dużej statystyce, minimalnej i maksymalnej wartości funkcji  $f_{ik}$ . Z założenia, prezentowana w tym podrozdziale metoda, jest szersza niż metoda „top-down” prezentowana wcześniej, ponieważ jest bogatsza o dyskusję wszystkich faz.

Jej celem jest uzyskanie zależności każdego modułu oraz powiązanej z nią fazy, macierzy (104) w funkcji najlżejszej masy neutrina.

Aby uzyskać informację o zachowaniu funkcji  $f_{ik}$  postępowano w następujący sposób:

- (a) Dla ustalonej hierarchii, masy cięższych neutrin, wyrażamy przez masę najlżejszego. Dla hierarchii normalnej, najmniejsza masa to  $m_1$ , zatem:

$$m_2 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{21}^2}, \quad (107)$$

$$m_3 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{31}^2} . \quad (108)$$

Natomiast dla odwrotnej najmniejsza z mas to  $m_3$ , zatem:

$$m_2 = \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{31}^2 + \Delta m_{21}^2} , \quad (109)$$

$$m_1 = \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{31}^2} . \quad (110)$$

- (b) Ustalając masę najmniejszego neutrina, pozostałe parametry losujemy, każdy w zakresie wartości dozwolonych błędami doświadczalnymi.
- (c) Przy odpowiednio dużej próbie losowej wybieramy wartość najmniejszą oraz największą funkcji  $f_{ik}$ , a więc możliwy zakres modułów i faz w macierzy masowej neutrin.

Tak dobra metodologia pozwala uzyskać nie tylko wykresy, z których można odczytać regiony utożsamiane z zerami macierzy masowej, ale również badać wpływ poszczególnych faz na przebieg zależności  $f_{ik}$ . Koncepcja ta zaproponowana została w pracy [51].

W pracy przyjęto, że przedział masy najlżejszego neutrina zawiera się w zakresie  $m \sim 0.0001 - 1$  eV. Przyjmuje się wartość funkcji  $f_{ik}$  za zero gdy spełniony jest warunek  $f_{ik} < 10^{-6}$ .

Ustalając, że parametry oscylacyjne:  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ , a także różnice kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ , losowane są w zakresie swoich błędów na poziomie  $1\sigma$ , wszystkie elementy macierzy masowej przeanalizowane zostały przy trzech różnych kombinacjach parametrów wejściowych:

- (a) Faza Diraca  $\delta$ , zmieniająca się w zakresie od  $0 - 2\pi$ .  
Fazy Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$ , ustalone, równe zero.  
Obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji przy tak dobranych parametrach jest zakreskowany na niebiesko.
- (b) Faza Diraca  $\delta$ , zmienia się w zakresie  $0 - 2\pi$ .  
Fazy Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$ , ustalone równe  $\pi/4$ .  
Obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji przy tak dobranych parametrach jest zakreskowany na czerwono.
- (c) Faza Diraca  $\delta$  oraz fazy Majorany  $\alpha_1, \alpha_2$ , zmieniająca się w zakresie od  $0 - 2\pi$ .  
Obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji przy tak dobranych parametrach jest zaciemniony na szaro.

Dodatkowo przeanalizowany był czwarty zestaw danych analogiczny do omawianego w punkcie (c) ale przy założeniu, że parametry oscylacyjne:  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ , a także różnice kwadratów mas  $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ , losowane są w zakresie swoich błędów na poziomie  $3\sigma$ . Odpowiadający tej konfiguracji parametrów obszar powstały na wykresie pomiędzy minimalną oraz maksymalną wartością funkcji jest równy obszarowi szaremu przedłużonemu o obszar zakreskowany na szaro.

Uzyskane wykresy zebrane są na Rysunkach od 14 do 19.

Jednoznacznie można stwierdzić, że na poziomie  $1\sigma$  zabronione są dwie tekstury zerowe. Dla parametru  $\mathcal{M}_{11}$  (Rysunek 14, obszar jednolicie szary) przy hierarchii odwrotnej oraz dla parametru  $\mathcal{M}_{33}$  (Rysunek 19, obszar jednolicie szary) dla hierarchii normalnej. Parametry te w języku metody „top-down” to **a** oraz **f**.

Na poziomie  $3\sigma$  zabroniona jest już tylko jedna tekstura, związana z elementem  $\mathcal{M}_{11}$ , przy hierarchii odwrotnej. Dla elementu  $\mathcal{M}_{33}$  zwiększenie poziomu ufności błędów skutkuje obniżeniem minimów funkcji  $f$  do wartości które zgodnie z kryterium przyjmuje się jako zero. Uwidocznione jest to na rysunku 19 jako przedłużenie jednolicie szarego obszaru o obszar zakreskowany tym kolorem.

Kolorem niebieskim zakreskowany jest wpływ fazy Diraca dla każdego z elementów. Nie należy naiwnie odczytywać tego obszaru tak jakby rozgraniczał on cząstki Diraca od Majorany. Dla cząstek Majorany faza  $\delta$  może być też różna od zera. Jest to ilustracja wkładu tej fazy w cały moduł elementu macierzowego.

Moduły te mogą w ogólności zmieniać się w całym zakresie szarego pola dla błędów na poziomie  $1\sigma$ . Dla błędów na poziomie  $3\sigma$  przebieg minimów funkcji  $f$  rozszerzony jest o obszar zakreskowany na szaro. Maksima tej funkcji nie są istotne dla obecnych rozważań dlatego nie są one uwidocznione na rysunkach.

Przy rozpatrywaniu modułów  $|\mathcal{M}_{ik}|$  fazy niefizyczne nie mają znaczenia. Wynika to z faktu, że elementy  $(\mathcal{M}_{ik})$  zależą od tych faz w sposób:

$$(\mathcal{M}_{ik}) \sim e^{-i\beta_i} e^{-i\beta_k} (\mathcal{M}_{ik})' , \quad (111)$$

gdzie ze wzorów (32) oraz (50) mamy:

$$(\mathcal{M}_{ik})' = \left( U_D^* f_M^* M_{diag} f_M^* U_D^\dagger \right)_{ik} , \quad (112)$$

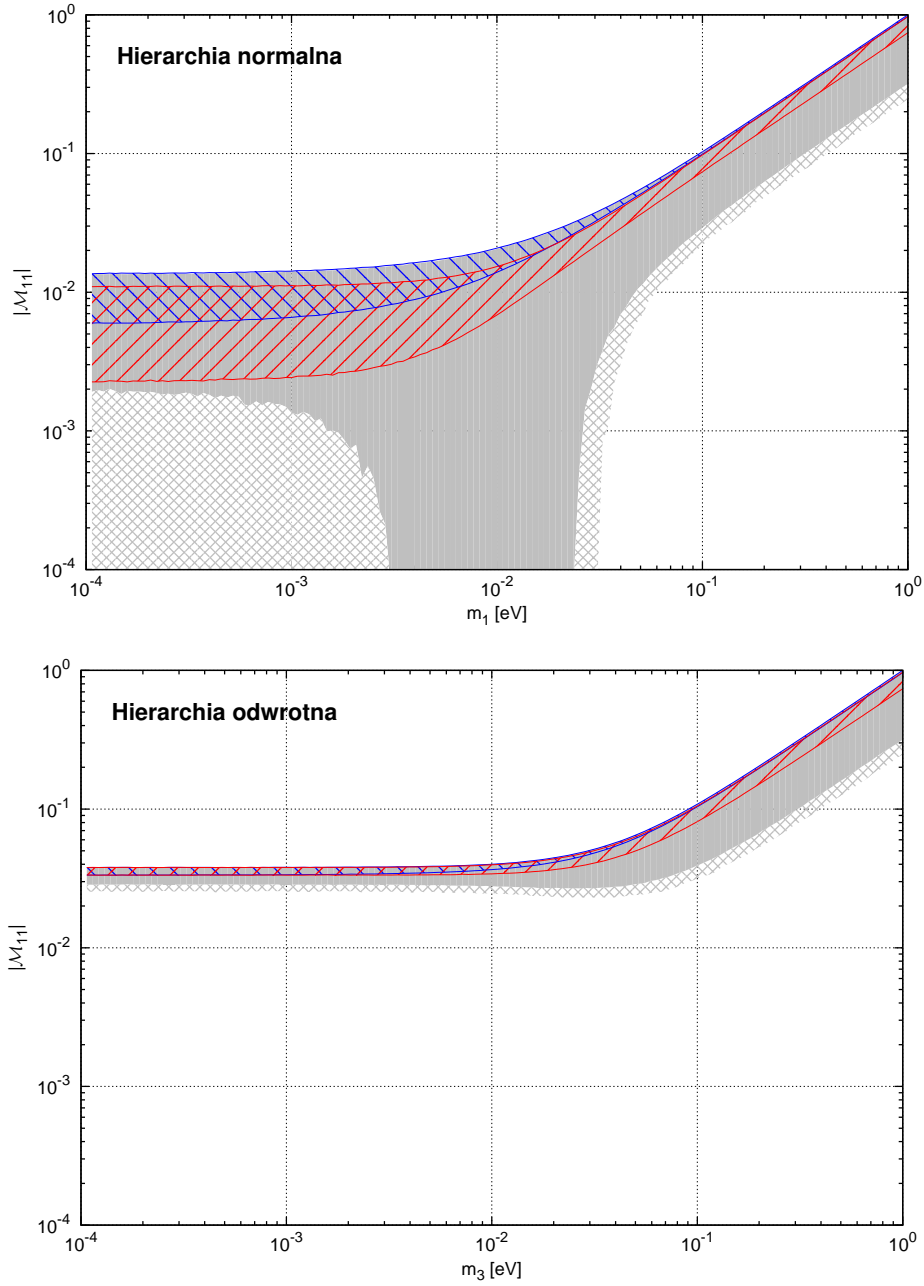
zatem moduły macierzy masowej są od tych faz niezależne. Istotnym wnioskiem płynącym z analizy uzyskanych wyników jest to, że dla ustalonych wartości faz Majorany moduły macierzy masowej nie muszą, mimo zmienności reszty parametrów od których zależy funkcja  $f$  dążyć do zera. Na rysunkach

reprezentowane jest to przez obszary zakreskowane na czerwono. Innymi słowy, natura Majorany neutrin nie jest warunkiem wystarczającym istnienia tekstur zerowych. Tylko w pewnym zakresie faz Majorany moduły elementów macierzowych mogą być równe zero.

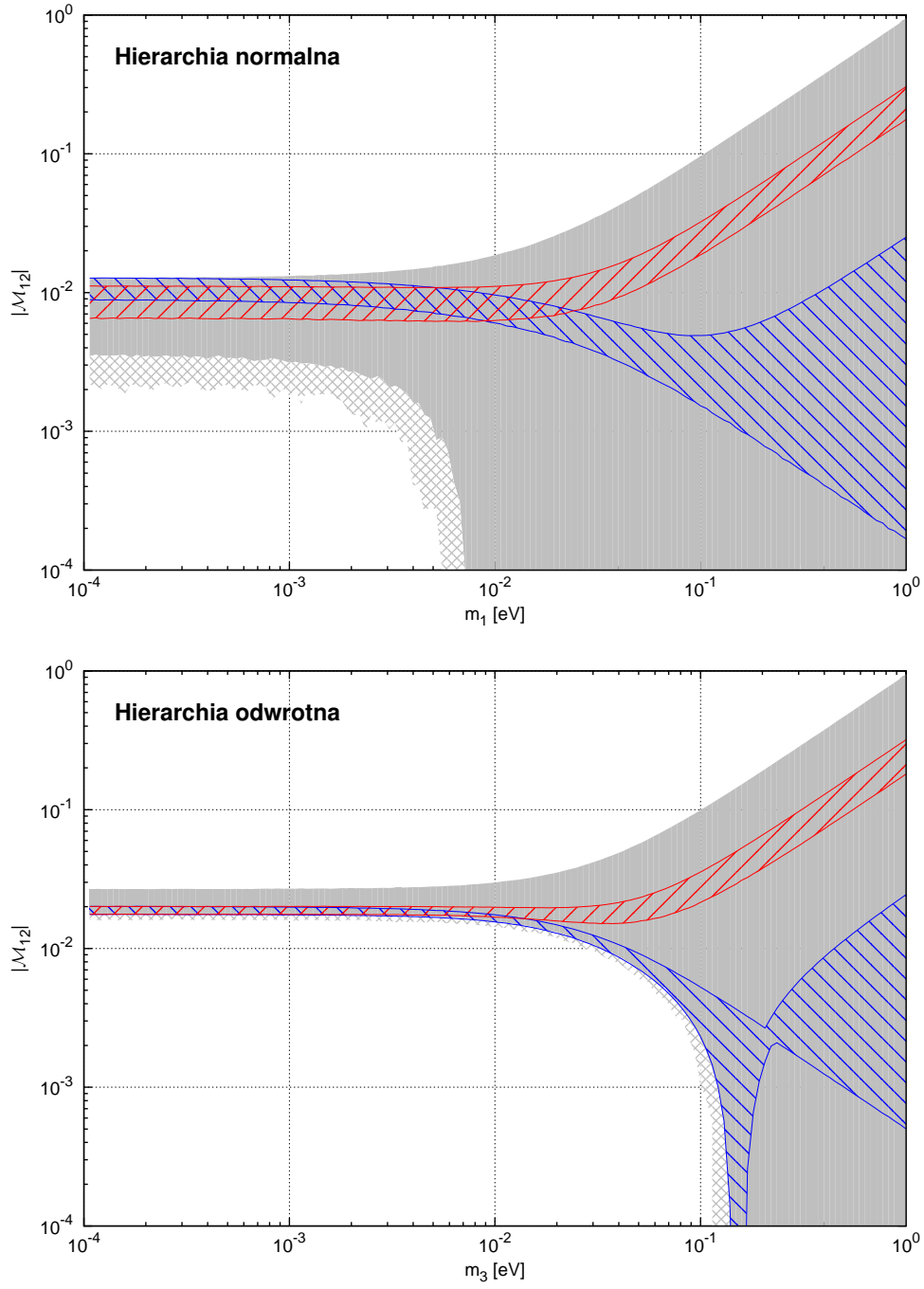
Istnieje wiele prac [71, 98] w których autorzy kreślą zależności modułów macierzy masowej od najlżejszego neutrina, w tych analizach fazy łamania symetrii CP nie są brane pod uwagę. Wpływ faz Majorany i udział faz Diraca w tych zależnościach, są tu prezentowane po raz pierwszy.

Fazy elementów macierzy masowej neutrin  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  (104) nie podlegają pomiarowi, a więc nie są przedmiotem analizy.

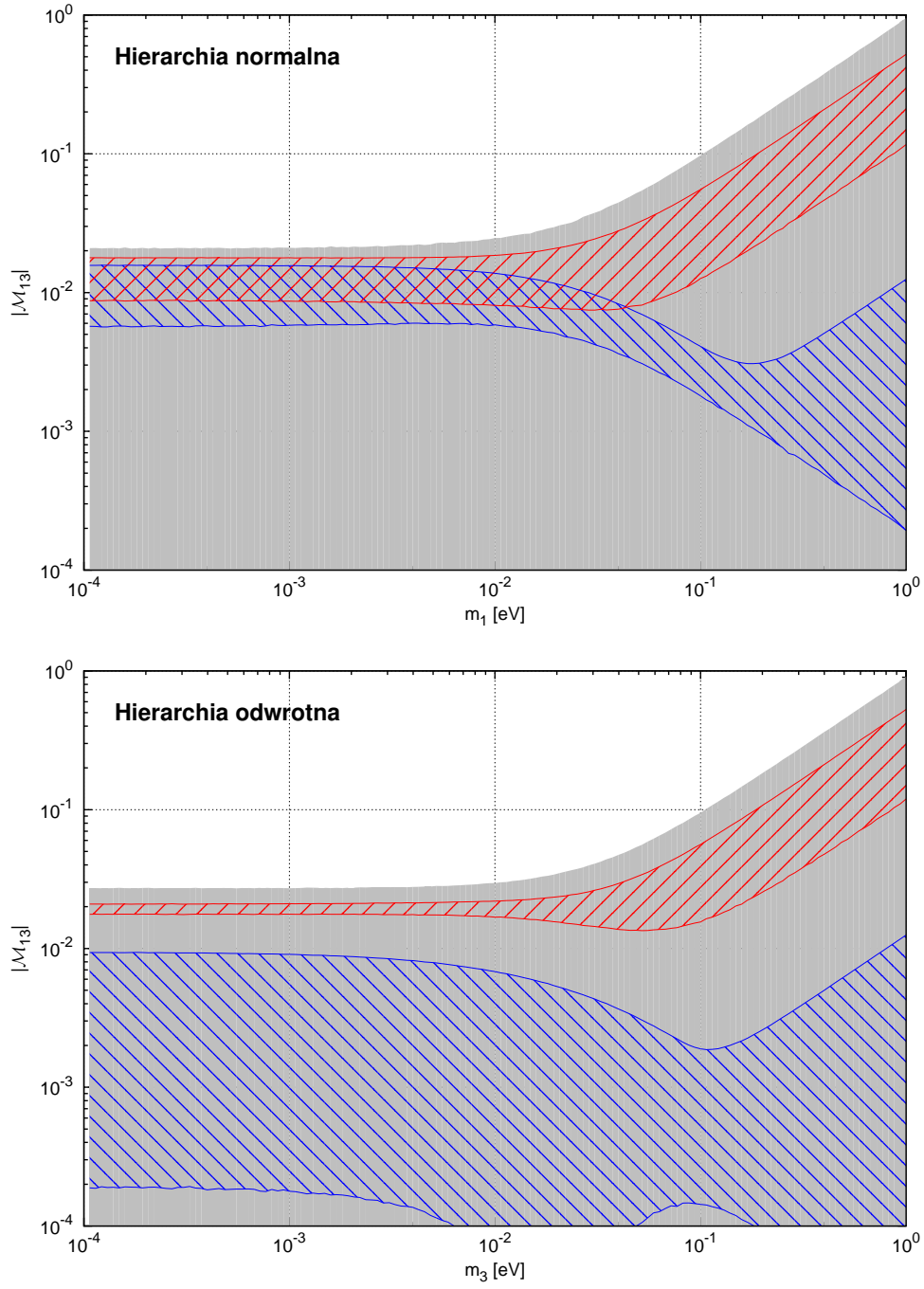




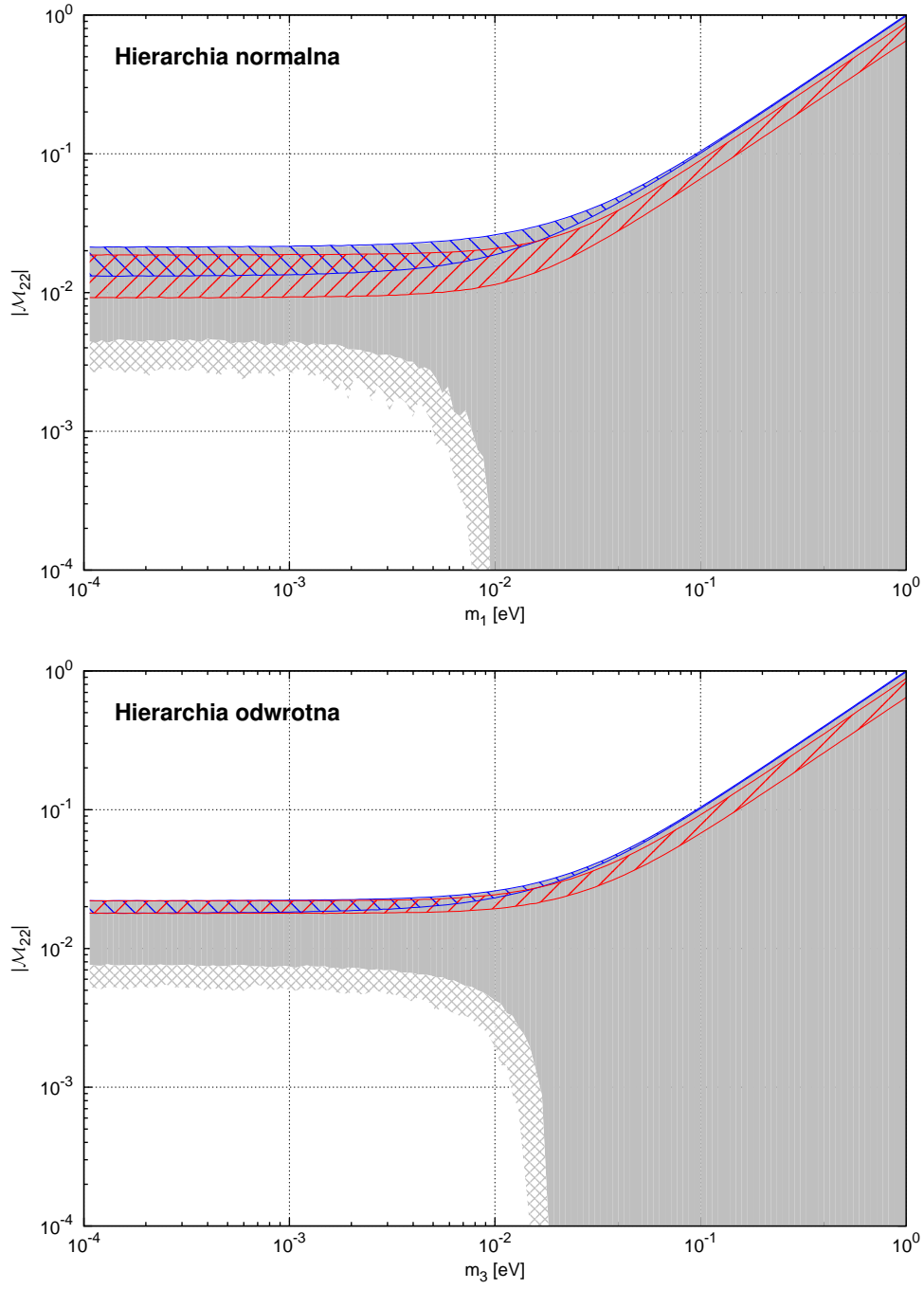
Rysunek 14: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{11}|$  od masy najbliższego neutrina. Na szaro zaznaczony obszar w którym faza Diraca i fazy Majorany są dowolne (obszar pełny - błędy na poziomie  $1\sigma$ , obszar pełny plus kreskowany - błędy na poziomie  $3\sigma$ ). Na niebiesko zaznaczony jest obszar w którym fazy Majorany wynoszą zero. Na czerwono zaznaczony jest obszar w którym faza Diraca jest dowolna a fazy Majorany ustalone ( $\pi/4$ ).



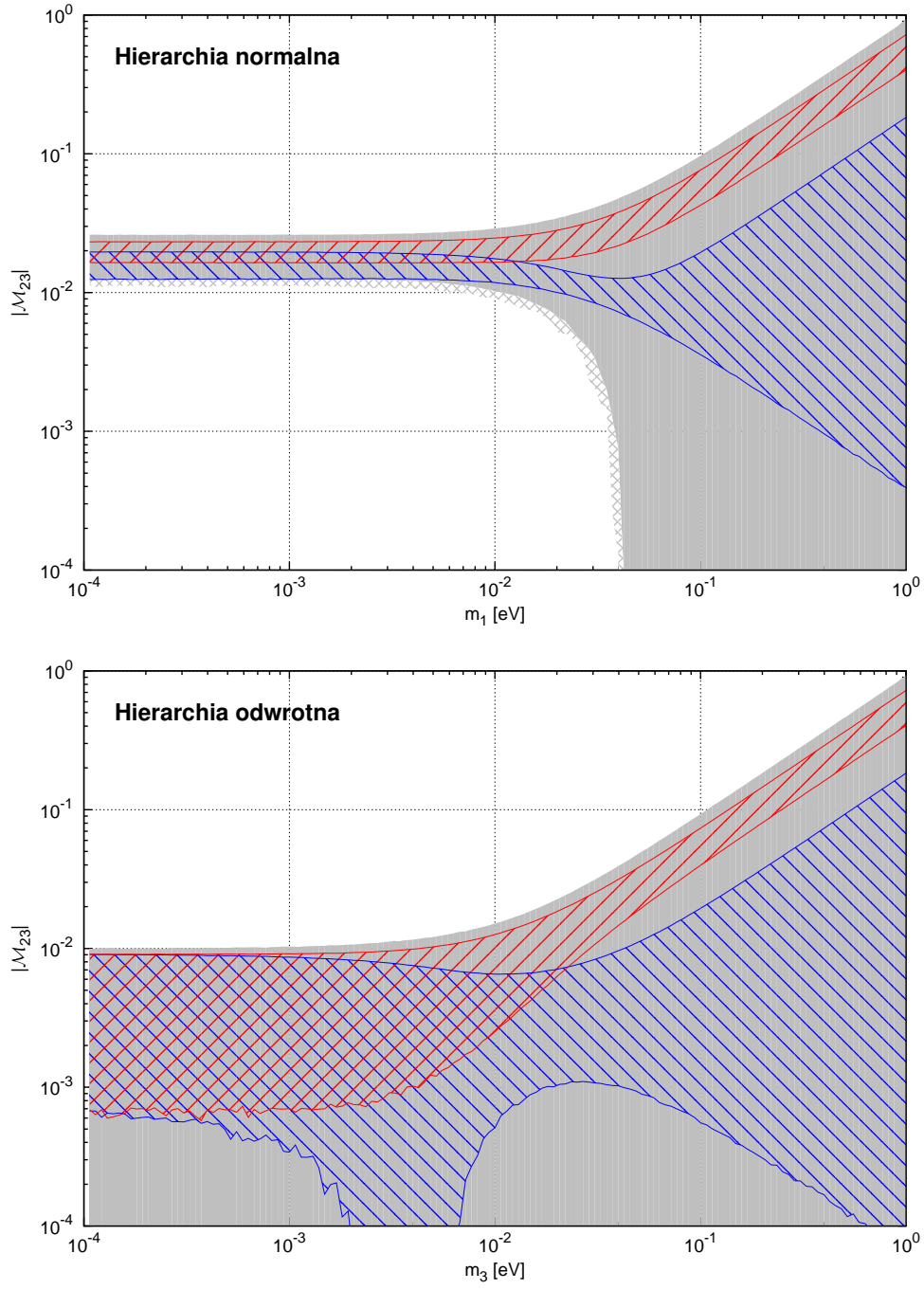
Rysunek 15: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{12}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).



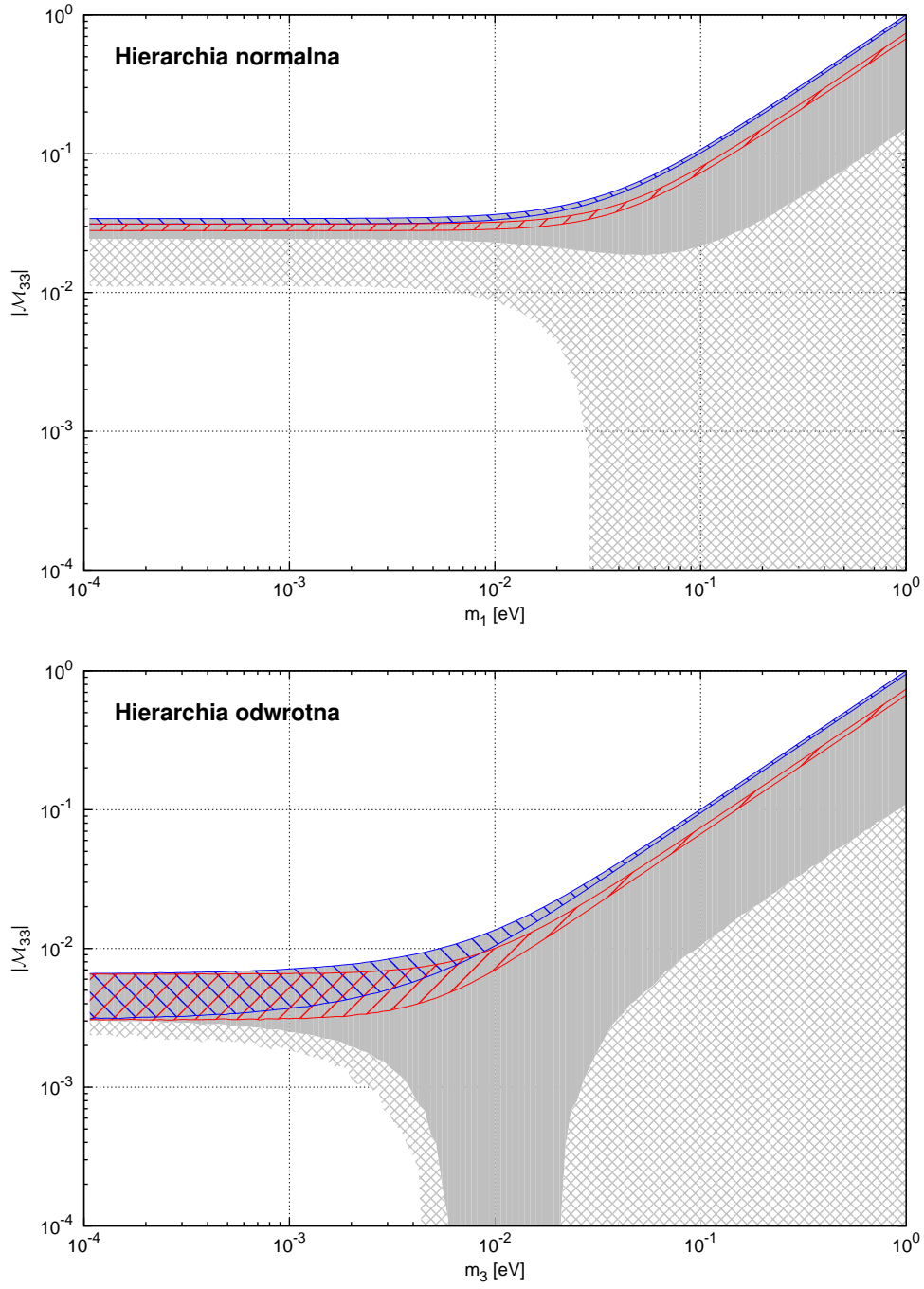
Rysunek 16: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{13}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).



Rysunek 17: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{22}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).



Rysunek 18: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{23}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).



Rysunek 19: Zależność modułu macierzy masowej neutrin  $|\mathcal{M}_{33}|$  od masy najbliższego neutrina. Dalszy opis jak na Rys. (14).

## 4 Nieabelowe dyskretne grupy symetrii macierzy masowej leptonów

W poprzednim rozdziale rozpatrywane były pewne własności macierzy masowej neutrin, polegające na przyjęciu założenia o zerowaniu się jej elementów. Zawsze taką własność macierzy masowych można wyjaśnić istnieniem pewnych skończonych symetrii abelowych.

Inna próba wyjaśnienia mieszania PMNS polega na przyjęciu relacji pomiędzy elementami macierzy masowej  $\mathcal{M}_\nu$ , wynikających z istnienia symetrii nieabelowej. Próbuje znaleźć taką transformację pomiędzy rodzinami neutrin i leptonów naładowanych, które dadzą zgodne z eksperymentem, relacje pomiędzy elementami macierzy masowej.

Prezentowana w tym rozdziale dyskusja ma charakter opisowy [99, 100], nie dysponujemy na razie własnymi wynikami numerycznymi.

### 4.1 Symetrie nieabelowe w Modelu Standardowym i jego rozszerzeniach

W Modelu Standardowym opartym o symetrię cechowania opisaną grupą  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  chiralne lewe stany cząstek transformują się względem reprezentacji dwuwymiarowej, tworząc dublety:

$$Q_{\alpha L} = \begin{pmatrix} u_{\alpha L} \\ d_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad L_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha L} \\ l_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad (113)$$

natomiast stany prawe są singletami grupy cechowania:

$$u_{\alpha R}, \quad d_{\alpha R}, \quad \nu_{\alpha R}, \quad l_{\alpha R}. \quad (114)$$

Lagranżjan Yukawy w poszerzonym MS, w którym neutrina posiadają masę ma postać:

$$L_Y = - \sum_{\alpha, \beta} \left( h_{\alpha, \beta}^u [\bar{Q}_{\alpha L} \Phi u_{\beta R}] + h_{\alpha, \beta}^d [\bar{Q}_{\alpha L} \tilde{\Phi} d_{\beta R}] + h_{\alpha, \beta}^l [\bar{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi} l_{\beta R}] + h_{\alpha, \beta}^\nu [\bar{L}_{\alpha L} \Phi \nu_{\beta R}] \right). \quad (115)$$

gdzie,  $\Phi$  jest dubletem Higgsa:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi^- \end{pmatrix}, \quad \text{natomiast} \quad \tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*, \quad (116)$$

$h_{\alpha,\beta}^u, h_{\alpha,\beta}^d, h_{\alpha,\beta}^l, h_{\alpha,\beta}^\nu$  są macierzami Yukawy.  
Po spontanicznym złamaniu symetrii:

$$\langle \tilde{\Phi} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (117)$$

otrzymujemy cztery macierze masowe dla kwarków i leptonów

$$M_{\alpha,\beta}^u = \frac{vh_{\alpha,\beta}^u}{\sqrt{2}}, \quad M_{\alpha,\beta}^d = \frac{vh_{\alpha,\beta}^d}{\sqrt{2}}, \quad M_{\alpha,\beta}^l = \frac{vh_{\alpha,\beta}^l}{\sqrt{2}}, \quad M_{\alpha,\beta}^\nu = \frac{vh_{\alpha,\beta}^\nu}{\sqrt{2}}. \quad (118)$$

dające Lagranżjan masowy postaci:

$$\begin{aligned} L_{mass} = & - \sum_{\alpha,\beta} \left( [\bar{u}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^u u_{\beta R}] + [\bar{d}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^d d_{\beta R}] \right. \\ & \left. + [\bar{l}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^l l_{\beta R}] + [\bar{\nu}_{\alpha L} M_{\alpha,\beta}^\nu \nu_{\beta R}] \right). \end{aligned} \quad (119)$$

W ogólności macierze (118) są macierzami zespolonymi o wymiarze 3. Dla neutrin Majorany są zespolonymi macierzami symetrycznymi. Dokładna dyskusja macierzy masowej neutrin jest przedmiotem pierwszego rozdziału pracy.

Założyliśmy, że neutrina mają naturę Diraca. Dla neutrin Majorany musimy przyjąć:

$$\nu_{\beta R} = C \bar{\nu}_{\beta L}^T. \quad (120)$$

Podobnie, gdy istnieją neutrina sterylne, postać (119) dla lekkich neutrin nie ulega zmianie, natomiast:

$$M^\nu \rightarrow M_L^\nu - M_D M_R^{-1} M_D^T. \quad (121)$$

Symetrie pomiędzy elementami macierzy leptonów możemy rozważać w MS a także w jego rozszerzeniach. Wychodząc poza MS, można rozważać więcej multipletów Higgsa, na przykład:

- $N_S$  singletów:  $H_m, m = 1, 2, \dots, N_S$ ,
- $N_d$  dubletów:  $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, N_d$ , gdzie:  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_i^0 \\ \phi_i^- \end{pmatrix}$ ,
- $N_t$  trypletów:  $\Delta_n, n = 1, 2, \dots, N_t$ , gdzie:  $\Delta_n = \begin{pmatrix} \Delta_n^+ & \sqrt{2}\Delta_n^{++} \\ \Delta_n^0 & -\Delta_n^+ \end{pmatrix}$ .



Jak zobaczymy takie rozszerzenia będą konieczne. Niektóre pola Higgsa pojawiają się jako pola flawonowe. W najogólniejszej sytuacji mechanizm nadawania masy dopuszcza sprzężenie z różnymi polami Higgsa. Oznaczmy dowolne z wymienionych pól fermionowych jako:

$$\psi_\alpha = \{Q_{\alpha L} \text{ lub } u_{\alpha R}, d_{\alpha R}; L_{\alpha L} \text{ lub } l_{\alpha R}, \nu_{\alpha R}\} . \quad (122)$$

Założmy, że istnieje skończona rodzinna symetria  $\mathcal{G}$  według której transformują się zarówno pola reprezentowane przez dublety jak i pola reprezentowane przez singlety. Niech dla każdego z pól  $\psi_\alpha$  istnieją trójwymiarowe macierze reprezentacji  $P$  grupy  $\mathcal{G}$  oznaczone jako  $A_p^\psi$ , oraz odpowiednio wymiarowe macierze reprezentacji grupy  $\mathcal{G}$  dla multipletów Higgsa, oznaczone np. dla dubletów jako  $A_p^\Phi$ .

Rozpatrzmy symetrię rodzinną  $\mathcal{G}$  dla członów Yukawy na przykładzie neutrin. Symetria ta dla innych pól, realizowana jest analogicznie. W Modelu Standardowym względem zakładanej symetrii, człon Yukawy:

$$L_Y = - \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} h_{\alpha, \beta}^\nu \left[ \bar{L}_{\alpha L} \Phi \nu_{\beta R} \right] , \quad (123)$$

musi być niezmienniczy. Powyższy Lagranżjan zapisany jest dla jednego pola Higgsa. W sytuacji ogólnej przyjmuje on formę (gdy mamy na przykład  $N_d$  dubletów Higgsa):

$$L_Y = - \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \sum_{i=1}^{N_d} \bar{L}_{\alpha L} (h_i^\nu)_{\alpha, \beta} \Phi_i \nu_{\beta R} \quad (124)$$

Zakładamy, że pola w Lagranżjanach (123) i (124) transformują się w sposób:

$$L'_{\alpha L} = \sum_{\chi=e, \mu, \tau} (A_p^L)_{\alpha \chi} L_{\chi R} , \quad (125)$$

dla dubletów, dla singletów:

$$\nu'_{\beta R} = \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} (A_p^\nu)_{\beta \alpha} \nu_{\alpha R} , \quad (126)$$

oraz dla pól Higgsa:

$$\Phi'_i = \sum_{k=1}^{N_d} (A_p^\Phi)_{ik} L_k . \quad (127)$$

Po takiej transformacji pól Lagranżjan (124) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} L'_Y &= - \sum_{i=1}^{N_d} \left[ (A_p^{L*})_{\alpha, \chi} \bar{L}_{\chi L} \right] (h_i^\nu)_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^{N_d} \left[ (A_p^\Phi)_{i, k} \Phi_k \right] \left[ (A_p^\nu)_{\beta, \delta} \nu_{\delta R} \right] = \\ &= - \sum_{k=1}^{N_d} \bar{L}_{\chi L} (\tilde{h}_k^\nu)_{\chi, \delta} \Phi_k \nu_{\delta R} , \end{aligned} \quad (128)$$

Przyjmujemy w dalszym ciągu konwencję, iż nie piszemy jawnie sum po zapachu, czyli:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} B_{\alpha} \equiv A_{\alpha} B_{\alpha} . \quad (129)$$

Parametry Yukawy  $(\tilde{h}_k^{\nu})_{\chi,\delta}$  (Rów. (128)) po transformacji wyrażają się w sposób:

$$\begin{aligned} (\tilde{h}_k^{\nu})_{\chi,\delta} &= \sum_{i=1}^{N_d} (A_p^{L\dagger})_{\chi,\alpha} (h_i^{\nu})_{\alpha,\beta} (A_p^{\Phi})_{i,k} (A_p^{\nu})_{\beta,\delta} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_d} \left( (A_p^{L\dagger} h_i^{\nu} A_p^{\nu}) \right)_{\chi,\delta} (A_p^{\Phi})_{i,k} . \end{aligned} \quad (130)$$

Dokonanie transformacji pól (125) - (127) nie zmienia całego Lagranżjanu naszego modelu oddziaływań elektroslabych. Interesuje nas symetria macierzy masowych wynikających z oddziaływań Yukawy, tak więc zakładamy, że: (123) oraz (128) są równe:

$$L_Y = L'_Y . \quad (131)$$

Stąd otrzymamy równość macierzy Yukawy przed i po transformacji:

$$(\tilde{h}_k^{\nu})_{\chi,\delta} = (h_k^{\nu})_{\chi,\delta} . \quad (132)$$

Tak więc:

$$\sum_{i=1}^{N_d} \left( A_p^{L\dagger} (h_i^{\nu}) (A_p^{\Phi})_{i,k} A_p^{\nu} \right)_{\chi,\delta} = (h_k^{\nu})_{\chi,\delta} , \quad (133)$$

i podobnie dla leptonów naładowanych:

$$\sum_{i=1}^{N_d} \left( A_p^{L\dagger} (h_i^l) (A_p^{\Phi})_{i,k} A_p^l \right)_{\chi,\delta} = (h_k^l)_{\chi,\delta} . \quad (134)$$

Przyjmując, że każde pole Higgsa jest użyte do spontanicznego złamania symetrii, macierz masowa ma postać:

- przed transformacją symetrii:

$$(M^{\nu})_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{N_d} v_i (h_i^{\nu})_{\alpha\beta} , \quad (135)$$

- i po transformacji symetrii:

$$(M^{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{v}_i (\tilde{h}_i^{\nu})_{\alpha\beta} . \quad (136)$$

Potencjał Higgsa  $V(\Phi)$  jest symetryczny:

$$V(\Phi'_i) = V(\Phi_i) , \quad (137)$$

a więc jego minimum przed i po transformacji pol  $\Phi_i$  jest w tym samym punkcie, stąd:

$$\tilde{v}_i = v_i \quad (138)$$

i biorąc pod uwagę równanie (132) otrzymujemy symetryczność macierzy masowej:

$$M'^{\nu} = M^{\nu} . \quad (139)$$

W ogólnym przypadku mamy więc (patrz równanie (130)):

$$M'^{\nu} = A_p^{L\dagger} \tilde{M}^{\nu} A_p^{\nu} , \quad (140)$$

gdzie:

$$\tilde{M}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,k=1}^{N_d} v_k h_i^{\nu} (A_p^{\Phi})_{i,k} , \quad (141)$$

jest różne od macierzy masowej przed transformacją

$$\tilde{M}^{\nu} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{N_d} v_k h_k^{\nu} \equiv M^{\nu} . \quad (142)$$

W ogólności równość zachodzi tylko w przypadku, gdy  $N_d = 1$ , wtedy

$$(A_p^{\Phi})_{ik} = \delta_{ik} , \quad (143)$$

i mamy:

$$\tilde{M}^{\nu} = M^{\nu} . \quad (144)$$

Jak zobaczymy za chwilę rozróżnienie jest bardzo ważne. W przypadku jednej cząstki Higgsa mamy bowiem:

$$M'^{\nu} = M^{\nu} = A^{L\dagger} M^{\nu} A_p^{\nu} . \quad (145)$$

Wszystkie powyższe rozważania możemy powtórzyć dla leptonów naładowanych. Z relacji (134) otrzymamy:

$$M'^l = A_p^{L\dagger} \tilde{M}^l A_p^l , \quad (146)$$

gdzie

$$\tilde{M}^l = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,k=1}^{N_d} v_k h_i^l (A_p^{\Phi})_{i,k} , \quad (147)$$

a więc także w ogólności:

$$\tilde{M}^l \neq M^l . \quad (148)$$

Równość mamy dla jednej cząstki Higgsa jak w MS i wtedy:

$$M^l = M^l = A_p^{L\dagger} M^l A_p^L . \quad (149)$$

W dalszym ciągu, dalej w ramach MS, mając relacje (146) oraz (149) będziemy rozpatrywać hermitowskie macierze:

$$M^l M^{l\dagger} \text{ oraz } M^\nu M^{\nu\dagger} . \quad (150)$$

Dla nich mamy bowiem:

$$M^l M^{l\dagger} = A_p^{L\dagger} M^l A_p^L A_p^{L\dagger} M^{l\dagger} A_p^L = A_p^{L\dagger} (M^l M^{l\dagger}) A_p^L \quad (151)$$

i podobnie:

$$M^\nu M^{\nu\dagger} = A_p^{L\dagger} (M^\nu M^{\nu\dagger}) A_p^L . \quad (152)$$

Z relacji tych wynika, że zarówno macierz  $M^L M^{L\dagger}$  jak i  $M^\nu M^{\nu\dagger}$  komutują z unitarnymi macierzami reprezentacji grupy symetrii  $\mathcal{G}$ :

$$[M^L M^{L\dagger}, A_p^L] = 0, \quad [M^\nu M^{\nu\dagger}, A_p^L] = 0 . \quad (153)$$

Te unitarne kwadraty macierzy masowych mają po diagonalizacji na przekątnej, odpowiednio kwadraty mas leptonów naładowanych i neutrin jako wartości własne:

$$U_L^{l\dagger} M^l U_R^l = (M^l)_{diag}, \quad U_L^{\nu\dagger} M^\nu U_R^\nu = (M^\nu)_{diag} . \quad (154)$$

$$(U_R^\nu = U_L^{\nu*} \text{ dla neutrin Majorany})$$

Wiemy, że są trzy różne masy leptonów naładowanych i trzy różne masy neutrin, a więc macierze masowe nie są zdegenerowane. Wiemy też, że macierze komutujące mają wspólne wektory własne. Tak więc z (153) wynika, że macierze:

$$M^l M^{l\dagger}, \quad M^\nu M^{\nu\dagger} \text{ oraz } A_p^L , \quad (155)$$

mają wspólne wektory własne. Jeżeli poza tym macierze są niezdegenerowane, to te wspólne wektory własne, które z założenia są unormowane, są określone z dokładnością do faz.

Interesują nas macierze diagonalizujące  $M^{l\dagger}$  oraz  $M^{\nu\dagger}$ , z nich bowiem zbudowana jest macierz PMNS. Mamy więc:

$$M^l M^{l\dagger} \rightarrow U_L^{l\dagger} M^l U_R^l U_R^{l\dagger} M^{l\dagger} U_L^l = U_L^{l\dagger} (M^l M^{l\dagger}) U^l = (M^l)_{diag}^2 , \quad (156)$$

$$M^\nu M^{\nu\dagger} \rightarrow U_L^{\nu\dagger} M^\nu U_R^\nu U_R^{\nu\dagger} M^{\nu\dagger} U_L^\nu = U_L^{\nu\dagger} (M^\nu M^{\nu\dagger}) U_L^\nu = (M^\nu)_{diag}^2 . \quad (157)$$

Wiemy, teŝ że unitarne macierze diagonalizujące, a więc  $U_L^l$  oraz  $U_L^\nu$  są zbudowane z unormowanych wektorów własnych odpowiednio macierzy  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ , co widać z relacji (na przykład dla leptonów naładowanych):

$$(M^l M^{l\dagger}) U_L^l = U_L^l (M^l)_{diag}^2 . \quad (158)$$

Bardziej precyzyjnie kolumny macierzy  $U_L^l$  to, z dokładnością do fazy, są wektorami własnymi macierzy  $M^l M^{l\dagger}$ .

Z dyskusji powyŝszej (patrz (155)) wiemy, że macierze  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$  mają wspólne wektory własne, a więc takŝe macierze  $U_L^l$  oraz  $U_L^\nu$  z dokładnością do fazy, mają takie same kolumny, czyli w ogólności:

$$U_L^\nu = U_L^l \mathcal{F} , \quad (159)$$

gdzie:

$$\mathcal{F} = \text{diag}(e^{i\eta_1}, e^{i\eta_2}, e^{i\eta_3}) . \quad (160)$$

Stąd wynika, że w macierz mieszania PMNS w prądzie naładowanym:

$$U_{PMNS} = U_L^{l\dagger} U_L^\nu = U_L^{l\dagger} U_L^l \mathcal{F} = \mathcal{F} , \quad (161)$$

jest diagonalną macierzą trzech faz, co jak wiemy nie jest zgodne z danymi eksperymentalnymi (patrz rozdział 2). Jak zobaczymy za chwilę, aby otrzymać w MS akceptowalną macierz mieszania  $U_{PMNS}$ , symetria rodzinna musi być złamana.

W przypadku większej liczby cząstek Higgsa sytuacja taka nie ma miejsca, z równań (140) (146) mamy bowiem:

$$M^l M^{l\dagger} = A_p^{L\dagger} (\tilde{M}^l \tilde{M}^{l\dagger}) A_p^L \quad \text{ i } \quad \tilde{M}^l \tilde{M}^{l\dagger} \neq M^l M^{l\dagger} , \quad (162)$$

i podobnie:

$$M^\nu M^{\nu\dagger} = A_p^{L\dagger} (\tilde{M}^\nu \tilde{M}^{\nu\dagger}) A_p^L \quad \text{ i } \quad \tilde{M}^\nu \tilde{M}^{\nu\dagger} \neq M^\nu M^{\nu\dagger} . \quad (163)$$

Relacja komutacji (153) nie ma miejsca, a więc nie ma związku pomiędzy wektorami własnymi macierzy  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ . W takim razie kolumny macierzy diagonalizujących  $U_L^l$  oraz  $U_L^\nu$  (patrz (156) i (157)), za każdym razem równe wektorom własnym  $M^l M^{l\dagger}$  oraz  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ , nie są ze sobą powiązane i relacje (159) oraz (161) nie mają miejsca. Aby więc otrzymać różną od diagonalnej macierz PMNS nie musimy łamać symetrii rodzinnej  $\mathcal{G}$ .

W przypadku Modelu Standardowego aby otrzymać  $U_{PMNS} \neq \mathcal{F}$  musimy założyć, że lewe pola leptonów naładowanych  $l_L$  i neutrin  $\nu_L$  muszą się transformować w różny sposób, a więc nie może być wspólnej transformacji dla dubletów:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \Rightarrow A_p^L \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (164)$$

i zamiast tego powinno być:

$$\nu_L \Rightarrow A_\nu^L \nu_L \quad \text{oraz} \quad l_L \Rightarrow A_l^L l_L \quad \text{z} \quad A_\nu^L \neq A_l^L. \quad (165)$$

Takiego złamania symetrii nie możemy zakładać na początku, gdyż Lagranżjan MS nie byłby niezmienniczy, a to był nasz wyjściowy warunek. Złamanie symetrii rodzinnej może być spontaniczne. Grupa symetrii rodzinnej nie powinna być ciągła. Wiemy bowiem, że złamanie globalnej ciągłej symetrii powoduje pojawienie się bezmasowych cząstek Goldstona, a tego chcemy uniknąć. Zakłada się więc, że grupa symetrii jest dyskretna.

W prezentowanej w pracy literaturze dyskutowane są dwa sposoby łamania symetrii rodzinnej. Obie klasy modeli zakładają, że globalna symetria rodzinna, po spontanicznym złamaniu manifestuje się poprzez „szczątkowe” pozostałości zakładanej symetrii.

Modele funkcjonujące w żargonie jako „proste” zakładają, że po złamaniu globalnej symetrii rodzinnej pojawiają się dwie różne jej podgrupy:

$$\mathcal{G} \rightarrow \{G, F\}. \quad (166)$$

Jedna z nich kojarzona jest z leptonami naładowanymi (najczęściej oznaczana jako  $F$ ) natomiast druga z neutrinami (najczęściej oznaczana jako  $G$ ). Leptonowa macierz mieszania wyznaczana jest jednoznacznie z symetrii. Podejście to bazuje na założeniu, że grupa symetrii Kleina  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  macierzy masowej neutrin jest identyfikowana z podgrupami globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ . Najczęściej do zrealizowania tej klasy modeli wymagane jest rozszerzenie sektora Higgsa, ale nie jest to warunek konieczny [60].

Dla klas modeli określane jako „złożone” symetria Kleina macierzy masowej neutrin nie jest identyfikowana z żadną z podgrup globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ . Symetrię  $G$  oraz  $F$  są dyktowane mechanizmem „seesaw” I-go rodzaju.

Jako naturalne przyjmuje się, że grupa  $\mathcal{G}$  jest podgrupą  $SU(3)$  [101]. Do chwili obecnej, w poszukiwaniu globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ , przebadane zostały wszystkie grupy do rzędu 511 [102]. W ocenie autora rozprawy prezentuje ona najlepsze, bo pozwalające porównać założenia teoretyczne z ewidencją eksperymentalną, kryterium istnienia globalnej symetrii. Jest to praca, która opiera się na metodzie „direct” i bazuje na twierdzeniu, że każdy proces mieszania prowadzi do symetrii  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  w macierzy masowej neutrin Majorany i

symetrii  $\mathbb{Z}_3$  w macierzy masowej leptonów naładowanych. „Szczątkowe” grupy  $G$  oraz  $F$  są iloczynami półprostymi globalnej symetrii  $\mathcal{G}$ , co jest kluczowe dla modelowania macierzy mieszania leptonów i neutrin. W szczególności oznacza to, że nie można zdiagonalizować równocześnie w tym iloczynie półprostym wszystkich generatorów grup  $\mathbb{Z}_3$  i  $\mathbb{Z}_2$ . Każda z tych grup osobno, oczywiście, może być zaprezentowana przez diagonalne macierze 3-wymiarowe. To odstępstwo od współdiagonalizacji w iloczynie półprostym jest równocześnie źródłem nietrywialności macierzy mieszania. Wielkością kodującą ten efekt, uzyskaną bezpośrednio z reprezentacji grup  $\mathcal{G}$ , jest tzw *wektor mieszania* (mixing vector). Aby zweryfikować istnienie globalnej symetrii  $\mathcal{G}$  jest on bezpośrednio porównywany z odpowiednimi kolumnami macierzy PMNS za pośrednictwem testów statystycznych.

Ponieważ próby powiązania mieszania z nieabelową symetrią rodzinną nie dają rezultatu, w literaturze m. in. postuluje się dokładniejsze przebadanie tekstur zerowych i kryjących się za nimi symetrii abelowych. Jednocześnie wskazuje się na potrzebę uzyskania dokładnych danych eksperymentalnych pochodzących z eksperymentów oscylacyjnych neutrin. Z fenomenologicznego punktu widzenia „ratunkiem” dla koncepcji istnienia rodzinnych symetrii nieabelowych jest włączenie w sposób dający możliwość weryfikacji z doświadczeniem takich koncepcji jak: rozpatrzenie modeli zakładających sprzężenie z inną niż w MS cząstką Higgsa a także rozszerzenie rozważań o neutrina sterylne, zarówno przy założeniu obowiązywania MS oraz jego rozszerzeń. Jest to przedmiotem bieżącej pracy autora.

## 4.2 Związek między wyborem bazy dla leptonów naładowanych a symetrią rodzinną

Najczęściej wszystkie rozważania dotyczące symetrii horyzontalnej przeprowadza się w bazie w której fermiony dolne a więc kwarki d i naładowane leptony, są fizyczne, a więc mają określoną masę.

Rozważmy tę kwestię i zobaczmy jakie zmiany są konieczne i czy symetria rodzinna w bazie fizycznej jest inna w porównaniu z bazą masową. Tak jak poprzednio wprowadźmy wektory zbudowane ze stanów zapachowych. Dla leptonów naładowanych:

$$L_L = \begin{pmatrix} e_l \\ \nu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad L_R = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}, \quad (167)$$

oraz dla neutrin:

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad N_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}, \quad (168)$$

Macierze masowe w wyjściowych stanach zapachowych są określone następująco:

$$L_{mass}^l = -\bar{L}_{L\alpha} M_{\alpha\beta}^l L_{R\beta} + h.c., \quad (169)$$

oraz:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_{L\alpha} M_{\alpha\beta}^\nu N_{R\beta} + h.c. \quad (170)$$

Po transformacji unitarnej (gdzie stany fizyczne oznaczamy indeksem „i”)

$$L_{L\alpha} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 (U_L^l)_{\alpha i} L_{Li}, \quad L_{R\alpha} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 (U_R^l)_{\alpha i} L_{Ri}, \quad (171)$$

otrzymamy Lagranżjan masowy:

$$L_{mass}^l = -\bar{L}_{Li} (U_L^{l\dagger})_{i\alpha} M_{\alpha\beta}^l (U_R^l)_{\beta k} L_{Rk} + h.c. = -\sum_{i=1}^3 m_i^l \bar{L}_{Li} L_{Ri} + h.c. \quad (172)$$

podobnie dla neutrin:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_{Li} (U_L^{\nu\dagger})_{i\alpha} M_{\alpha\beta}^\nu (U_R^\nu)_{\beta k} N_{Rk} + h.c. = -\sum_{i=1}^3 m_i^\nu \bar{N}_{Li} N_{Ri} + h.c. \quad (173)$$

Niech:

$$(U_L^l)_{\alpha i} \equiv S_{\alpha i} \equiv S_{\alpha\beta}, \quad (174)$$

gdzie tym razem stan masowy „i” oznaczyliśmy przez „ $\beta$ ”, aby podkreślić, że w tym wypadku stan masowy jest tożsamy ze stanem zapachowym.

Dokonajmy na wszystkich stanach zapachowych identycznej transformacji:

$$L_L \Rightarrow S L_L, \quad L_R \Rightarrow S L_R, \quad (175)$$

$$N_L \Rightarrow S N_L, \quad N_R \Rightarrow S N_R, \quad (176)$$

Z symetrii Lorentza wynika, że cały Lagranżjan MS (ale także w przypadku uogólnień MS) z wyjątkiem Lagranżjanu Yukawy, nie ulega zmianie przy takiej transformacji.

Dokonując transformacji (175) i (176) macierze masowe (169) i (170) przekształcają się odpowiednio:

$$L_{mass}^l = -\bar{L}_L (S^\dagger M^l S) L_R + h.c. \quad (177)$$



oraz:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_L(S^\dagger M^\nu S)N_R + h.c. \quad (178)$$

W nowej bazie zdiagonalizujemy nasze macierze masowe:

$$\begin{aligned} L_{mass}^l &= -\bar{L}(U_L^{l\dagger} S^\dagger M^l S U_R^l) L_R + h.c. = -L_L(S^\dagger M^l U_R^l) L_R + h.c. = \\ &= \sum_\alpha m_\alpha^l \bar{L}_{L\alpha} L_{R\alpha} + h.c. , \end{aligned} \quad (179)$$

gdzie przyjęliśmy  $U_L^l = I$  oraz  $S U_R^l = U_R^l$  a także:

$$L_{mass}^\nu = -\bar{N}_L(U_L^{\nu\dagger} S^\dagger M^\nu S U_R^\nu) N_R + h.c. = -\bar{N}_L(U_L^{\nu\dagger} M^\nu U_R^\nu) N_R + h.c. , \quad (180)$$

gdzie tym razem  $S U_L^\nu = U_L^\nu$  oraz  $S U_R^\nu = U_R^\nu$ . Po takiej transformacji leptonu naładowane mają określoną masę natomiast nowa macierz masowa neutrin jest diagonalizowana transformacją biunitarną z nowymi macierzami:

$$U_L^\nu = S^\dagger U_L^\nu \quad \text{oraz} \quad U_R^\nu = S^\dagger U_R^\nu . \quad (181)$$

W tej nowej bazie, macierz mieszania:

$$U_{PMNS} = U_L^l , \quad (182)$$

w prądzie naładowanym:

$$\bar{L}_L \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_L \rightarrow \bar{L}_L (U_L^{l\dagger} U_L^\nu) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_L = \bar{L}_L U_L^\nu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_L , \quad (183)$$

jest więc równa macierzy diagonalizującej kwadrat macierzy masowej  $M^\nu M^{\nu\dagger}$ . W naszej nowej bazie macierz masowa neutrin ma postać:

$$\underline{M}^\nu = S^\dagger M^\nu S , \quad (184)$$

a także:

$$\underline{M}^\nu \underline{M}^{\nu\dagger} = S^\dagger (M^\nu M^{\nu\dagger}) S . \quad (185)$$

Jeżeli więc istniała symetria rodzinna w starej bazie:

$$[M^\nu M^{\nu\dagger}, A_p^l] = 0 , \quad (186)$$

to w nowej bazie też będzie istniała symetria rodzinna:

$$[\underline{M}^\nu \underline{M}^{\nu\dagger}, A_p^l] = 0 , \quad (187)$$

gdzie:

$$A_p^l = S^\dagger A_p^l S . \quad (188)$$

Nowe macierze  $A_p^l$  są połączone se starymi  $A_p^l$  transformacją podobieństwa, która opisuje tylko zmianą bazy i nie zmienia symetrii:

$$\mathcal{G} = \{A^{l,\dots}\} = \{A_p^l, \dots\} = \mathcal{G} . \quad (189)$$

W ten sposób po zmianie bazy symetrie rodzinne nie zmieniają się.

## 5 Podsumowanie

Z analizy dyskretnych nieabelowych symetrii rodzinnych wynika, że nie można ich trywialnie zrealizować. Większość dostępnych prac dotyczących takich symetrii koncentruje się głównie na założeniu, że wyjściowym modelem jest Model Standardowy, w którym występują trzy generacje kwarków i leptonów (bez neutrin sterylnych) oraz podstawowy sektor Higgsa z jednym dubletem. Dla takiego konwencjonalnego MS poszukiwanie symetrii rodzinnej, z nowymi danymi dla neutrinowej macierzy mieszania, szczególnie dla kąta różnego od zera zakończyło się fiaskiem. Przebadano różne grupy skończone aż do rzędu 511 nie otrzymując zgodności z doświadczeniem. Pomimo tego, iż prace z tej „masowej” części fizyki zapachu trwają już dość długo problem wciąż nie jest rozwiązany.

Wnioskiem z analiz w tym obszarze jest konieczność rozszerzenia prowadzonych badań. W szczególności o koncepcje takie jak: szczegółowe przebadanie teorii z bogatszym sektorem Higgsa - teorii z dwoma dubletami oraz trypletem, a także rozważenie sytuacji w której oprócz trzech aktywnych neutrin pojawiają się neutrina sterylne (jedno lub więcej) a sektor Higgsa ma strukturę standardową lub rozbudowaną.

O ile powiększenie sektora kwarkowego i sektora naładowanych leptonów jest trudne do zaakceptowania (dane doświadczalne silnie ograniczają takie hipotezy), to przyjęcie rozszerzonego sektora neutrinowego i innego sektora łamiącego symetrię cechowania jest ciągle rozważane. Poza tym, do tej pory analizowane modele przyjmują w zasadzie, że ta sama symetria zapachowa obowiązuje dla fermionów górnych (neutrina i kwarki typu „up” oraz dolnych (leptony naładowane i kwarki typu „down”), co w ogólności prowadzi do diagonalnej macierzy mieszania.

Brak globalnej symetrii nieabelowej był impulsem do uważniejszych analiz symetrii abelowych. W czasie gdy obowiązywał schemat TBM, który w dużej zgodności z doświadczeniem wynikał z symetrii nieabelowych, nie było konieczności stosowania grup cyklicznych. Spowodowało to odwrót od rozważania koncepcji je zakładających. Wobec silnej falsyfikacji schematu TBM, wynikającej z dokładniejszych oszacowań wartości parametrów macierzy mieszania neutrin, koncepcja symetrii abelowych stała się ponownie popularna. Grupy cykliczne zawsze można utożsamiać z zerami macierzy masowej neutrin. Daje to użyteczne narzędzie weryfikacji istnienia zakładanych symetrii. W rozprawie doktorskiej zaprezentowane zostały dwie grupy modeli rozważanych przy założeniu, że za kształtem macierzy masowej neutrin, a co za tym idzie kształtem leptonowej macierzy mieszania, kryją się symetrie abelowe. Zakładając zerowe wartości konkretnych elementów macierzy masowej neutrin, przebadane zostały możliwe realizacje tekstur zerowych zarówno dla

starszych, nieaktualnych już danych oscylacyjnych jak i dla danych bieżących. Przedstawiona została autorska metoda weryfikacji istnienia możliwych tekstur zerowych, bazująca na numerycznych obliczeniach Monte Carlo. Pokazano, że wraz z dokładniejszymi eksperymentalnymi oszacowaniami wartości modułów elementów macierzy mieszania, ilość możliwych różnych tekstur zerowych ulega ograniczeniu. Dla nieaktualnych już danych oscylacyjnych możliwe było siedem niezależnych tekstur z dwoma różnymi zerami oraz zabroniona była jedna tekstura z jednym zerem. Preferowane były oba schematy masowe dla neutrin zarówno schemat normalny jak i odwrotny. W świetle aktualnych danych oscylacyjnych ilość tekstur z dwoma zerami została ograniczona do pięciu, przy jednoczesnej preferencji normalnego schematu masowego. Utrzymany jest wniosek o tym, że nie realizowana jest tylko jedna tekstura zakładająca jedno zero.

W drugiej części rozdziału 3 zaprezentowana została analiza wpływu poszczególnych faz fizycznych na zależność modułu elementu macierzy masowej od masy najlżejszego neutrina. Fazy niefizyczne nie dają żadnego wkładu do modułu elementu macierzy masowej neutrin. Metoda ta została zaaplikowana do weryfikacji istnienia tekstur z jednym zerowym elementem macierzy masowej neutrin. Potwierdzone zostało, że na poziomie zgodności  $3\sigma$  nierealizowana jest tylko jedna tekstura. Wyprowadzony jest wniosek o tym, że tylko dla pewnych zakresów faz Majorany, moduły elementów macierzowych mogą być równe zero. Taka zależność nie była wcześniej dyskutowana w literaturze.

## Dodatek A Podstawowe definicje

Macierze Pauliego definiujemy jako:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right). \quad (190)$$

Wykorzystując powyższą definicję (190) można skonstruować dwa wektory:

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}) \quad \text{oraz} \quad \hat{\sigma}^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}). \quad (191)$$

Czterowymiarowe macierze ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) to tak zwane macierze Diraca spełniające następujące relacje antykomutacji:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (192)$$

oraz:

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (193)$$

Stosowana w tej pracy reprezentacja macierzy  $\gamma^\mu$  zwana jest reprezentacją chiralną (Weyla) i przyjmuje następującą postać:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \hat{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (194)$$

czyli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (195)$$

Wykorzystując macierze (194) można zdefiniować macierz chiralności  $\gamma_5$ :

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (196)$$

Stany:

$$\gamma_5 \psi = -\psi, \quad (197)$$

nazywamy lewoskrętnymi, natomiast stany:

$$\gamma_5 \psi = +\psi, \quad (198)$$

przez analogię - prawoskrętnymi.

Niech  $\psi$  będzie czterekomponentowym spinorem. Definiujemy operatory rzutowe  $P_L, P_R$ :

$$\psi_L = P_L \psi \equiv \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi, \quad (199)$$

$$\psi_R = P_R \psi \equiv \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi. \quad (200)$$

Lewoskrętne (199) i prawoskrętne (200) spinory opisują stany własne operatora chiralności (196) odpowiadające wartościom własnym  $\pm 1$ .

Zauważmy następujące własności operatorów rzutowych:

$$P_L^2 = P_L, \quad (201)$$

$$P_R^2 = P_R, \quad (202)$$

$$0 = P_L P_R = P_R P_L, \quad (203)$$

$$I = P_L + P_R. \quad (204)$$

Z relacji (204), dowolny bispinor można przedstawić jako sumę dwu wkładów o przeciwnych chiralnościach:

$$\psi = I\psi = P_L \psi + P_R \psi \equiv \psi_L + \psi_R. \quad (205)$$

Pochodną  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ , definiuje się jako:

$$\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu, \quad (206)$$

co oznacza, że dla dowolnych spinorów  $\psi_1$  i  $\psi_2$ :

$$\psi_1^T \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_2 = \psi_1^T (\partial_\mu \psi_2) - (\partial_\mu \psi_1^T) \psi_2. \quad (207)$$

Ze względu na neutralny charakter neutrin istnieje możliwość narzucenia dodatkowego warunku (tzw. warunek Majorany):

$$\psi = \mathcal{C} \bar{\psi}^T = \psi^c, \quad (208)$$

gdzie:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0, \quad (209)$$

natomiast  $\mathcal{C}$  to operacja sprzężenia ładunkowego transformująca cząstkę w jej antycząstkę:

$$\psi(x) \rightarrow \psi^c(x) = \mathcal{C} \bar{\psi}^T(x) = -\gamma^0 \mathcal{C} \psi^*(x) \quad (210)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^c(x) = -\psi^T(x) \mathcal{C}^\dagger, \quad (211)$$

spełniająca następujące własności:

$$\mathcal{C}\gamma_\mu^T\mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu, \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1}, \quad \mathcal{C}^T = -\mathcal{C}. \quad (212)$$

Podobnie dla stanów lewych i prawych:

$$\psi_L \rightarrow (\psi^c)_L \equiv \psi_L^c = (\psi_R)^c, \quad (213)$$

$$\psi_R \rightarrow (\psi^c)_R \equiv \psi_R^c = (\psi_L)^c. \quad (214)$$

Narzucenie warunku Majorany oznacza, iż cząstka ma identyczne własności jak jej antycząstka.

Macierz  $\mathcal{C}$  jest równa:

$$\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0 \quad (215)$$

i w bazie Weyla ma postać:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (216)$$

gdzie:

$$\varepsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (217)$$

## Dodatek B Diagonalizacja macierzy

**Twierdzenie 1.** *Dowolną nieosobliwą macierz  $m$  można zdiagonalizować za pomocą podwójnej transformacji unitarnej:*

$$S^\dagger m T = m_d \quad (218)$$

*Dowód.* Macierz  $mm^\dagger$  jest hermitowska, istnieje więc unitarna macierz  $S$  taka, że:  $S^\dagger mm^\dagger S = m_d^2$ .

Zdefiniujmy:  $H = Sm_d S^\dagger = H^\dagger$  oraz  $V = H^{-1}m$ .

Macierz  $V$  jest unitarna, co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Zatem:  $m_d = S^\dagger HS = S^\dagger m V^\dagger S = S^\dagger m T$ , gdzie:  $T = V^\dagger S$ .  $\square$

**Twierdzenie 2.** *Dowolną symetryczną nieodobliwą macierz zespoloną można zdiagonalizować transformacją ortogonalną za pomocą macierzy unitarnej.*

*Dowód.* Korzystając z twierdzenia (1) mamy:  $S^\dagger m T = m_d$ , gdzie  $S$  i  $T$  są macierzami unitarnymi.

Zatem  $mm^\dagger = Sm_d^2 S^\dagger$  oraz  $mm^\dagger = T^* m_d^2 T^T$ .

Porównując otrzymamy:  $T^T Sm_d^2 = m_d^2 T^T S$ . Ponieważ macierz  $m_d^2$  jest diagonalną, więc macierz  $T^T S$  także musi być diagonalna. Jest ona także unitarna, więc można zapisać:  $T^T S = U$ , gdzie  $U_{ik} = e^{2i\alpha_k} \delta_{ik}$ .

Zatem wstawiając tę relację do wzoru diagonalizującego z twierdzenia (1) otrzymamy  $(T')^T m T' = m_d$ , gdzie  $T' = T(U^*)^{1/2}$   $\square$

## Dodatek C Podstawienia

Z równania (65) każdy element macierzy  $\mathcal{H}$  może być w łatwy sposób wyrażony za pomocą modułu i fazy  $(\mathcal{M}_\nu)_{a,b} = m_{a,b} e^{i\varphi_{a,b}}$ ,  $(a, b = e, \mu, \tau)$ . Wartości własne macierzy  $\mathcal{H}$ :

$$m_1^2 = \frac{2}{3}p \cos(\phi) - \frac{a}{3}, \quad (219)$$

$$m_2^2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}p \left( \cos(\phi) - \sqrt{3} \sin(\phi) \right), \quad (220)$$

$$m_3^2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}p \left( \cos(\phi) - \sqrt{3} \sin(\phi) \right), \quad (221)$$

gdzie:

$$p = \sqrt{a^2 - 3b}, \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{1}{p^2} \left( a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c \right) \right), \quad (222)$$

oraz:

$$a = -\text{Tr}[\mathcal{H}], \quad (223)$$

$$b = AD + AF + DF - B^2 - C^2 - E^2, \quad (224)$$

$$c = AE^2 + DC^2 + FB^2 - ADF - 2BCE \cos(\phi_1 + \phi_3 - \phi_2). \quad (225)$$

Znormalizowane wektory własne  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|X_1|^2 + |Y_1|^2 + |Z_1|^2}} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \quad (226)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= (D - m_1^2)(F - m_1^2) - E^2, \\ Y_1 &= C \cdot E e^{-i(\phi_2 - \phi_3)} - B e^{-i\phi_1}(F - m_1^2), \\ Z_1 &= B \cdot E e^{-i(\phi_1 + \phi_3)} - C e^{-i\phi_2}(D - m_1^2), \end{aligned} \quad (227)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|X_2|^2 + |Y_2|^2 + |Z_2|^2}} \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad (228)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= C \cdot E e^{i(\phi_2 - \phi_3)} - B e^{i\phi_1}(F - m_2^2), \\ Y_2 &= (A - m_2^2)(F - m_2^2) - C^2, \\ Z_2 &= B \cdot C e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - E e^{-i\phi_3}(A - m_2^2), \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|X_3|^2 + |Y_3|^2 + |Z_3|^2}} \cdot \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \quad (230)$$

$$\begin{aligned} X_3 &= B \cdot E e^{i(\phi_1 + \phi_3)} - C e^{i\phi_2}(D - m_3^2), \\ Y_3 &= B \cdot C e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} - E e^{i\phi_3}(A - m_3^2), \\ Z_3 &= (A - m_3^2)(D - m_3^2) - B^2. \end{aligned} \quad (231)$$

## Literatura

- [1] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar. **"Helicity of Neutrinos"**. *Phys. Rev.*, 109:1015–1017, Feb 1958. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1015>. [str. 7, 15]
- [2] B. Pontecorvo. **"Mesonium and anti-mesonium"**. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 33: 549-551 (1957) [*Sov. Phys. JETP* 6: 429. (1957)]. [str. 7]
- [3] F. Reines and C. L. Cowan. **"Detection of the Free Neutrino"**. *Phys. Rev.*, 92:830–831, Nov 1953. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.92.830>. [str. 7]
- [4] Frederick Reines and Clyde L. Cowan. **"Free Antineutrino Absorption Cross Section. I. Measurement of the Free Antineutrino Absorption Cross Section by Protons"**. *Phys. Rev.*, 113:273–279, Jan 1959. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.113.273>. [str. 7]
- [5] R. Davis. Bull. am. phys. soc. Washington meeting, 1959. [str. 7]
- [6] G. Danby, J-M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger. **"Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos"**. *Phys. Rev. Lett.*, 9:36–44, Jul 1962. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.9.36>. [str. 7]
- [7] Ziro Maki, Masami Nakagawa, and Shoichi Sakata. **"Remarks on the unified model of elementary particles"**. *Prog. Theor. Phys.*, 28:870–880, 1962. doi:10.1143/PTP.28.870. [str. 7]
- [8] B.T. Cleveland, Timothy Daily, Jr. Davis, Raymond, James R. Distel, Kenneth Lande, et al. **"Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector"**. *Astrophys. J.*, 496:505–526, 1998. doi:10.1086/305343. [str. 8]
- [9] Collaboration KAMIOKANDE. *Phys. Rev. Lett.* 63, 6 (1989); *Phys. Rev. Lett.* 65, 1297 (1990); *Phys. Rev. Lett.* 65, 1301 (1990); *Phys. Rev. Lett.* 66, 9 (1991); *Phys. Rev. D* 44, 2241 (1991). [str. 8]
- [10] Collaboration SAGE. *Phys. Rev. Lett.* 67, 3332 (1991); *Phys. Lett. B* 328, 234 (1994); *Phys. Rev. Lett.* 83, 4686 (1990); *Phys. Rev. C* 60, 055801 (1990). [str. 8]



- [11] Collaboration GALLEX. Phys. Lett. B285, 376 (1992); Phys. Lett. B285, 390 (1992); Phys. Lett. B357, 237 (1995). [str. 8]
- [12] V. Gribov and B. Pontecorvo. **"Neutrino astronomy and lepton charge"**. *Physics Letters B*, 28(7):493 – 496, 1969. Dostępne z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269369905255>. [str. 8]
- [13] Super-Kamiokande Collaboration and Y. Fukuda et al. **"Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos"**. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/9807003>. [str. 8]
- [14] F. del Aguila, J. Syska, and M. Zralek. **"Impact of right-handed interactions on the propagation of Dirac and Majorana neutrinos in matter"**. *Phys.Rev.*, D76:013007, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0702182>. [str. 10]
- [15] J. Beringer et al. **"Particle Data Group"**. *Phys. Rev. D*86, 010001, (2012). doi:10.1103/PhysRevD.86.010001. [str. 14, 15]
- [16] M.H. Ahn et al. **"Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment"**. *Phys.Rev.*, D74:072003, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0606032.pdf>. [str. 14]
- [17] K. Abe et al. **"Observation of Electron Neutrino Appearance in a Muon Neutrino Beam"**. *Phys.Rev.Lett.*, 112:061802, 2014. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1311.4750.pdf>. [str. 14, 20]
- [18] S. Abe et al. **"Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND"**. *Phys.Rev.Lett.*, 100:221803, 2008. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/0801.4589.pdf>. [str. 14]
- [19] P. Adamson et al. **"Measurement of Neutrino and Anti-neutrino Oscillations Using Beam and Atmospheric Data in MINOS"**. *Phys.Rev.Lett.*, 110(25):251801, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1304.6335.pdf>. [str. 14, 20]
- [20] Dominique Duchesneau. **"The OPERA Long Baseline Experiment: Status and First Results"**. 2008. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0810.2476>. [str. 14]
- [21] A.A. Aguilar-Arevalo et al. **"The MiniBooNE Detector"**. *Nucl.Instrum.Meth.*, A599:28–46, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/0806.4201.pdf>. [str. 14]

- [22] J.N. Abdurashitov et al. **"Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal"**. *Phys.Rev.*, C60:055801, 1999. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9907113.pdf>. [str. 14]
- [23] M. Ishitsuka. **"Super-Kamiokande results: Atmospheric and solar neutrinos"**. 2004. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0406076>. [str. 14]
- [24] J. Boger et al. **"The Sudbury neutrino observatory"**. *Nucl.Instrum.Meth.*, A449:172–207, 2000. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/nucl-ex/9910016>. [str. 14]
- [25] A.B. McDonald. **"Sudbury neutrino observatory results"**. *Phys.Scripta*, T121:29–32, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0412060>. [str. 14]
- [26] Albrecht Karle. **"IceCube: Construction Status and First Results"**. *Nucl.Instrum.Meth.*, A604:S46–S52, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0812.3981>. [str. 14]
- [27] G. Alimonti et al. **"The Borexino detector at the Laboratori Nazionali del Gran Sasso"**. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 600:568–593, March 2009. doi:10.1016/j.nima.2008.11.076. [str. 14]
- [28] F.P. An et al. **"Spectral measurement of electron antineutrino oscillation amplitude and frequency at Daya Bay"**. *Phys.Rev.Lett.*, 112:061801, 2014. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1310.6732.pdf>. [str. 14, 20]
- [29] D. V. Forero, M. Tórtola, and J. W. F. Valle. **"Global status of neutrino oscillation parameters after recent reactor measurements"**. Technical Report IFIC/12-31, May 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1205.4018>. [str. 16]
- [30] G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo, et al. **"Global analysis of neutrino masses, mixings and phases: entering the era of leptonic CP violation searches"**. *Phys.Rev.*, D86:013012, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1205.5254v3>. [str. 16, 37, 38]
- [31] M.C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Jordi Salvado, and Thomas Schwetz. **"Global fit to three neutrino mixing: critical look at present precision"**. *JHEP*, 12:123, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1209.3023v3>. [str. 16]

- [32] W. Pauli. Neutrino Physics edited by K. Winter. *Cambridge University Press*, 1991. [str. 15]
- [33] E. Fermi. *Ricerca Scient.*, 2:12, 1933. [str. 15]
- [34] E. Fermi. **"An attempt of a theory of beta radiation. 1."**. *Z.Phys.*, 88:161–177, 1934. doi:10.1007/BF01351864. [str. 15]
- [35] F. Perrin. *Comptes Rendues*, 197:1625, 1933. [str. 15]
- [36] L. M. Langer and R. J. D. Moffat. **"The Beta-Spectrum of Tritium and the Mass of the Neutrino"**. *Phys. Rev.*, 88:689–694, Nov 1952. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.88.689>. [str. 15]
- [37] Ch. Kraus, B. Bornschein, L. Bornschein, J. Bonn, B. Flatt, et al. **"Final Results from phase II of the Mainz Neutrino Mass Search in Tritium Beta Decay"**. *Eur.Phys.J. C*, 40:447–468, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0412056>. [str. 15]
- [38] V. N. Aseev, A. I. Belev, A. I. Berlev, E. V. Geraskin, A. A. Golubev, et al. **"An upper limit on electron antineutrino mass from Troitsk experiment"**. *Phys. Rev. D*, 84:112003, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1108.5034>. [str. 15]
- [39] M. Goeppert-Mayer. **"Double Beta-Disintegration"**. *Phys. Rev.*, 48:512–516, Sep 1935. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.512>. [str. 16]
- [40] Giulio Racah. **"Sulla Simmetria Tra Particelle e Antiparticelle"**. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 14:322–328, 1937. doi:10.1007/BF02961321. Dostępne z: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02961321>. [str. 16]
- [41] W. H. Furry. **"On Transition Probabilities in Double Beta-Disintegration"**. *Phys. Rev.*, 56:1184–1193, Dec 1939. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.1184>. [str. 16]
- [42] S.M. Bilenky and C. Giunti. **"Neutrinoless double-beta decay. A brief review"**. 03 2012. arXiv:<http://arxiv.org/abs/1203.5250v1>. [str. 16]
- [43] A.M. Bakalyarov, A. Ya. Balysh, S.T. Belyaev, V.I. Lebedev, and S.V. Zhukov. **"Results of the experiment on investigation of Germanium-76 double beta decay: Experimental data"**

- of Heidelberg-Moscow collaboration November 1995 - August 2001". *Phys.Part.Nucl.Lett.*, 2:77–81, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0309016v1>. [str. 17]
- [44] R. Arnold et al. "Limits on different Majoron decay modes of Mo-100 and Se-82 for neutrinoless double beta decays in the NEMO-3 experiment". *Nucl.Phys.*, A765:483–494, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0601021.pdf>. [str. 17]
- [45] A.S. Barabash, V.B. Brudanin, and NEMO Collaboration. "Investigation of double beta decay with the NEMO-3 detector". 02 2010. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1002.2862v1>. [str. 17]
- [46] C. A. Ur. "The GERDA experiment: status and perspectives". *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 217:38–40, 2011. doi:10.1016/j.nuclphysbps.2011.04.061. [str. 17]
- [47] F.Bellini, C.Bucci, S.Capelli, et al. "Monte Carlo evaluation of the external gamma, neutron and muon induced background sources in the CUORE experiment". 12 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0912.0452v3>. [str. 17]
- [48] KamLAND-Zen Collaboration. "Measurement of the double-beta decay half-life of Xe with the KamLAND-Zen experiment". 01 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1201.4664>. [str. 17]
- [49] R. Gornea. "Search for double beta decay with the EXO-200 TPC and prospects for barium ion tagging in liquid xenon". *J. Phys. Conf. Ser.*, 309:012003, 2011. doi:10.1088/1742-6596. [str. 17]
- [50] S. Schael et al. "Precision electroweak measurements on the Z resonance". *Phys.Rept.*, 427:257–454, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0509008>. [str. 17]
- [51] Bartosz Dziewit, Sebastian Zajac, and Marek Zralek. "Majorana neutrino mass matrix with CP symmetry breaking". *Acta Phys.Polon.*, B42:2509–2516, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1204.3665>. [str. 17, 45]
- [52] P.F. Harrison, D.H. Perkins, and W.G. Scott. "Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data". *Phys.Lett.*, B530:167, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0202074v1>. [str. 19]

- [53] Ernest Ma. " **$A_4$  symmetry and neutrinos with very different masses**". *Phys.Rev.*, D70:031901, 2004. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0404199>. [str. 20]
- [54] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. "**Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete symmetry in extra dimensions**". *Nucl.Phys.*, B720:64–88, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0504165.pdf>. [str. 20]
- [55] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. "**Tri-bimaximal neutrino mixing,  $A(4)$  and the modular symmetry**". *Nucl.Phys.*, B741:215–235, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0512103.pdf>. [str. 20]
- [56] K.S. Babu and Xiao-Gang He. "**Model of geometric neutrino mixing**". 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0507217.pdf>. [str. 20]
- [57] I. de Medeiros Varzielas, S.F. King, and G.G. Ross. "**Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete subgroups of  $SU(3)$  and  $SO(3)$  family symmetry**". *Phys.Lett.*, B644:153–157, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0512313>. [str. 20]
- [58] W. Grimus and L. Lavoura. "**Tri-bimaximal lepton mixing from symmetry only**". *J. High Energy Phys.*, 2009(04):013+, April 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0811.4766>. [str. 20]
- [59] R.N. Mohapatra, S. Nasri, and Hai-Bo Yu. " **$S_3$  symmetry and tri-bimaximal mixing**". *Phys.Lett.*, B639:318–321, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0605020>. [str. 20]
- [60] C.S. Lam. "**The Horizontal Symmetry for Neutrino Mixing**". *Phys.Rev.Lett.*, 101:121602, 2008. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0804.2622>. [str. 20, 61]
- [61] Federica Bazzocchi and Stefano Morisi. " **$S(4)$  as a natural flavor symmetry for lepton mixing**". *Phys.Rev.*, D80:096005, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/0811.0345>. [str. 20]
- [62] Ferruccio Feruglio, Claudia Hagedorn, Yin Lin, and Luca Merlo. "**Tri-bimaximal Neutrino Mixing and Quark Masses from a Discrete Flavour Symmetry**". *Nucl.Phys.*, B775:120–142, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0702194>. [str. 20]

- [63] Paul D. Carr and Paul H. Frampton. **"Group Theoretic Bases for Tribimaximal Mixing"**. 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0701034>. [str. 20]
- [64] I. de Medeiros Varzielas, S.F. King, and G.G. Ross. **"Neutrino tri-bi-maximal mixing from a non-Abelian discrete family symmetry"**. *Phys.Lett.*, B648:201–206, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0607045>. [str. 20]
- [65] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Okada, Yusuke Shimizu, and Morimitsu Tanimoto. **"Lepton Flavor Model from  $\Delta(54)$  Symmetry"**. *JHEP*, 0904:011, 2009. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0811.4683>. [str. 20]
- [66] J.K. Ahn et al. **"Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment"**. *Phys.Rev.Lett.*, 108:191802, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/pdf/1204.0626.pdf>. [str. 20]
- [67] H. Nishiura, K. Matsuda, and T. Fukuyama. **"Lepton and quark mass matrices"**. *Phys.Rev.*, D60:013006, 1999. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9902385>. [str. 21]
- [68] Zhi-zhong Xing. **"Texture zeros and Majorana phases of the neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B530:159–166, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0201151>. [str. 21]
- [69] Zhi-zhong Xing. **"A Full determination of the neutrino mass spectrum from two zero textures of the neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B539:85–90, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0205032>. [str. 21]
- [70] Paul H. Frampton, Sheldon L. Glashow, and Danny Marfatia. **"Zeroes of the neutrino mass matrix"**. *Physics Letters B*, 536(1-2):79 – 82, 2002. Dostępne z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302018178>. [str. 22, 23, 35, 82]
- [71] Alexander Merle and Werner Rodejohann. **"The Elements of the neutrino mass matrix: Allowed ranges and implications of texture zeros"**. *Phys.Rev.*, D73:073012, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0603111>. [str. 22, 34, 47]

- [72] S. Dev, Sanjeev Kumar, Surender Verma, and Shivani Gupta. **"Phenomenology of two-texture zero neutrino mass matrices"**. *Phys.Rev.*, D76:013002, 2007. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0612102>. [str. 22]
- [73] Harald Fritzsch, Zhi-zhong Xing, and Shun Zhou. **"Two-zero Textures of the Majorana Neutrino Mass Matrix and Current Experimental Tests"**. *JHEP*, 1109:083, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1108.4534>. [str. 22]
- [74] Luis Lavoura. **"Zeros of the inverted neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B609:317–322, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0411232>. [str. 22]
- [75] E.I. Lashin and N. Chamoun. **"Zero minors of the neutrino mass matrix"**. *Phys.Rev.*, D78:073002, 2008. arXiv:<http://arxiv.org/abs/0708.2423>. [str. 22]
- [76] S. Dev, Surender Verma, Shivani Gupta, and R.R. Gautam. **"Neutrino Mass Matrices with a Texture Zero and a Vanishing Minor"**. *Phys.Rev.*, D81:053010, 2010. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1003.1006>. [str. 22]
- [77] Takeshi Fukuyama and Hiroyuki Nishiura. **"Mass matrix of Majorana neutrinos"**. 1997. arXiv:[hep-ph/9702253](http://arxiv.org/abs/hep-ph/9702253). [str. 22]
- [78] Satoru Kaneko, Hideyuki Sawanaka, and Morimitsu Tanimoto. **"Hybrid textures of neutrinos"**. *JHEP*, 0508:073, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0504074>. [str. 22]
- [79] S. Dev, Surender Verma, and Shivani Gupta. **"Phenomenological Analysis of Hybrid Textures of Neutrinos"**. *Phys.Lett.*, B687:53–60, 2010. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/0909.3182>. [str. 22]
- [80] W. Grimus and P.O. Ludl. **"Two-parameter neutrino mass matrices with two texture zeros"**. *J.Phys.*, G40:055003, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1208.4515>. [str. 22]
- [81] Atsushi Kageyama, Satoru Kaneko, Noriyuki Shimoyama, and Morimitsu Tanimoto. **"Seesaw realization of the texture zeros in the neutrino mass matrix"**. *Phys.Lett.*, B538:96–106, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0204291>. [str. 22]

- [82] Peter Minkowski. " **$\mu \rightarrow e\gamma$  at a rate of one out of 109 muon decays?**". *Physics Letters B*, 67(4):421 – 428, 1977. Dostępne z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026937790435X>. [str. 22]
- [83] Murray Gell-Mann, Pierre Ramond, and Richard Slansky. "**Complex Spinors and Unified Theories**". *Conf.Proc.*, C790927:315–321, 1979. arXiv:1306.4669. [str. 22]
- [84] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. "**Neutrino Mass and Spontaneous Parity Violation**". *Phys.Rev.Lett.*, 44:912, 1980. doi:10.1103/PhysRevLett.44.912. [str. 22]
- [85] Walter Grimus, Anjan S. Joshipura, Luis Lavoura, and Morimitsu Tanimoto. "**Symmetry realization of texture zeros**". *Eur.Phys.J.*, C36:227–232, 2004. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0405016>. [str. 22]
- [86] Walter Grimus. "**Neutrino mass matrices, texture zeros, and family symmetries**". *PoS*, HEP2005:186, 2006. arXiv:hep-ph/0511078. [str. 23]
- [87] Harald Fritzsch and Zhi-zhong Xing. "**Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons**". *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 45:1–81, 2000. arXiv:<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9912358>. [str. 23]
- [88] M. Hirsch, Anjan S. Joshipura, S. Kaneko, and J. W. F. Valle. "**Predictive Flavor Symmetries of the Neutrino Mass Matrix**". *Phys. Rev. Lett.*, 99:151802, Oct 2007. Dostępne z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.151802>. [str. 24]
- [89] Walter Grimus and Luis Lavoura. "**On a model with two zeros in the neutrino mass matrix**". *J.Phys.*, G31:693–702, 2005. arXiv:<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0412283>. [str. 24]
- [90] S. Dev, Shivani Gupta, and Radha Raman Gautam. "**Zero Textures of the Neutrino Mass Matrix from Cyclic Family Symmetry**". *Phys.Lett.*, B701:605–608, 2011. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1106.3451>. [str. 24]
- [91] B. Dziewit, K. Kajda, J. Gluza, and M. Zralek. "**Majorana neutrino textures from numerical considerations: The CP conserving case**". *Phys.Rev.*, D74:033003, 2006. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0604193>. [str. 26, 31]



- [92] **The NAG Fortran Library (2013).** Dostępne z: <http://www.nag.co.uk/>. [str. 26]
- [93] M.C. Gonzalez-Garcia. **"Global analysis of neutrino data"**. *Phys.Scripta*, T121:72–77, 2005. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0410030>. [str. 31, 32, 81, 82]
- [94] Dostępne z: [http://prac.us.edu.pl/~gluza/www\\_neutrinos/neutrino](http://prac.us.edu.pl/~gluza/www_neutrinos/neutrino). [str. 31, 35]
- [95] S. Pascoli and S.T. Petcov. **"The SNO solar neutrino data, neutrinoless double beta decay and neutrino mass spectrum"**. *Phys.Lett.*, B544:239–250, 2002. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0205022>. [str. 32]
- [96] Zhi-zhong Xing. **"Vanishing effective mass of the neutrinoless double beta decay?"**. *Phys.Rev.*, D68:053002, 2003. [arXiv:hep-ph/0305195](http://arxiv.org/abs/hep-ph/0305195). [str. 34]
- [97] F. Capozzi, G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, et al. **"Status of three-neutrino oscillation parameters, circa 2013"**. 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1312.2878>. [str. 37]
- [98] W. Grimus and P.O. Ludl. **"Correlations of the elements of the neutrino mass matrix"**. *JHEP*, 1212:117, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1209.2601v2>. [str. 47]
- [99] Stephen F. King and Christoph Luhn. **"Neutrino Mass and Mixing with Discrete Symmetry"**. *Rept.Prog.Phys.*, 76:056201, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1301.1340>. [str. 54]
- [100] Stephen F. King, Alexander Merle, Stefano Morisi, Yusuke Shimizu, and Morimitsu Tanimoto. **"Neutrino Mass and Mixing: from Theory to Experiment"**. *New J.Phys.*, 16:045018, 2014. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1402.4271>. [str. 54]
- [101] Walter Grimus and Patrick Otto Ludl. **"Finite flavour groups of fermions"**. *J.Phys.*, A45:233001, 2012. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1110.6376>. [str. 61]
- [102] C.S. Lam. **"Finite Symmetry of Leptonic Mass Matrices"**. *Phys.Rev.*, D87:013001, 2013. Dostępne z: <http://arxiv.org/abs/1208.5527>. [str. 61]

## Spis rysunków

1	<i>Hierarchia normalna i odwrotna.</i> . . . . .	15
2	<i>Tekstura A1. Pierwszy (wykres górny) i drugi (wykres dolny) etap losowania. Wykresy uzyskane dla <math>N_{\text{scat}} = N_{\text{calc}} = N_{\text{it}} = 100</math>.</i> . . . . .	30
3	<i>Dozwolone regiony parametrów macierzy masowej neutrin zgodne z [93]</i> . . . . .	32
4	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin: przypadek ogólny, hierarchia normalna.</i> . . . . .	33
5	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin: przypadek ogólny, hierarchia odwrotna.</i> . . . . .	33
6	<i>Tekstura A: Dozwolone wartości parametrów macierzy masowej neutrin dla <math>\alpha = 1</math> oraz <math>\alpha = 2</math>.</i> . . . . .	34
7	<i>Tekstura A: Histogramy kątów obrotów.</i> . . . . .	35
8	<i>Możliwe wartości sinusów kątów mieszania <math>\theta_{12}</math>, <math>\theta_{23}</math>, oraz <math>\theta_{13}</math> dla różnych tekstur macierzy masowej neutrin.</i> . . . . .	36
9	<i>Dozwolone regiony parametrów macierzy masowej neutrin.</i> . . . . .	39
10	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin dla bieżących danych oscylacyjnych: przypadek ogólny, hierarchia normalna.</i> . . . . .	40
11	<i>Spektrum częstotliwości elementów macierzy masowej neutrin dla bieżących danych oscylacyjnych: przypadek ogólny, hierarchia odwrotna.</i> . . . . .	40
12	<i>Tekstura A: Histogramy kątów obrotów, dla bieżących danych oscylacyjnych.</i> . . . . .	41
13	<i>Pierwszy wiersz histogramy dla tekstur A1 i A2, w drugi wiersz dla tekstur B1 oraz B3, w trzecim dla tekstury C.</i> . . . . .	43
14	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{11} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	48
15	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{12} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	49
16	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{13} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	50
17	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{22} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	51
18	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{33} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	52
19	<i>Zależność modułu macierzy masowej neutrin <math> \mathcal{M}_{33} </math> od masy najlżejszego neutrina.</i> . . . . .	53

## Spis tabel

1	<i>Trzy rodziny fermionów Modelu Standardowego, wraz z odpowiadającymi im masami (w MeV).</i>	1
2	<i>Podsumowanie parametrów oscylacyjnych dla neutrin.</i>	16
3	<i>Ograniczenia na masę z bezneutrinowego podwójnego rozpadu <math>\beta</math>.</i>	17
4	<i>Pomiary „reaktorowego” kąta mieszania <math>\sin^2 2\theta_{13}</math>.</i>	20
5	<i>Siedem dozwolonych tekstur z dwoma zerami, o których mowa jest w pracy [70].</i>	23
6	<i>Dozwolone wartości centralne i błędy na poziomie <math>3\sigma</math> modułów macierzy mieszania <math> U_{ij} </math> oraz różnic kwadratów mas <math>\Delta m_{32}^2</math>, <math>\Delta m_{21}^2</math> pochodzące z pracy [93].</i>	31
7	<i>Dozwolone tekstury z dwoma zerami.</i>	35
8	<i>Zmiana startowej wartości <math>x_i^{cent}</math> w wyniku działania procedury AMC.</i>	37
10	<i>Dozwolone tekstury z dwoma zerami.</i>	42
11	<i>Zmiana wartości centralnej <math>x_i^{cent}</math> w wyniku działania procedury AMC.</i>	43